Tractaet der Perspective

Perspectieftekenen volgens Frans van Schooten

Jan Beuving

7 november 2007

Scriptie ter afronding van de Bachelor Wiskunde
Universiteit Utrecht

1 Inleiding

Perspectieftekenen zoals dat nu op school wordt geleerd heeft een lange ontwikkeling doorgemaakt. P.J. Booker schreef er een uitgebreid boek over onder de titel *A History of Engeneering drawing*. In de bibliografie van dat boek komt de naam van Frans van Schooten niet voor. Niet verwonderlijk, want het enige ons bekende werk dat hij over perspectieftekenen schreef was een traktaatje in het Nederlands van enkele tientallen bladzijden, waarin hij alleen maar de basisbegrippen en basisvaardigheden behandelt.

Omdat Booker niet de enige was die het traktaat links liet liggen – zover ik kon achterhalen had er nog niemand serieus naar gekeken – leek het een goed idee, ook gezien de omvang, om het als uitgangspunt te gebruiken voor een bachelorscriptie. Die (kleine) scriptie bestaat uit twee delen; naast dit overzicht van de inhoud heb ik ook een transcriptie gemaakt van de originele tekst, zodat deze breder toegankelijk en beter leesbaar wordt dan voorheen het geval was. Het is de bedoeling dat dit inhoudelijke deel los van de transcriptie te lezen is, maar het kan geen kwaad die transcriptie binnen handbereik te hebben.

Het is lastig te achterhalen wat voor Van Schooten de reden geweest is om dit *Tractaet der Perspective* te schrijven, maar gelukkig is wat erin staat wel duidelijk te maken. Mijn doel is dan ook weer te geven wat Van Schooten behandelt, en eventuele onduidelijkheden van commentaar te voorzien. Enige informatie over het leven en werk van Frans van Schooten zal daarbij niet ontbreken, maar ik ga niet inhoudelijk in op zijn andere wiskundige werk. Daarmee wil ik niet zeggen dat het niet interessant is om dit traktaat te plaatsen in de context van zijn andere verdiensten, maar daarvoor ontbreekt mij simpelweg de kennis (en binnen het kader van de bachelorscriptie ook de tijd om die kennis eventueel op te doen).

Ik behandel niet het hele traktaat bladzijde voor bladzijde; dat zou slechts verveling wekken en bovendien is de tekst daarvoor te duidelijk. Ik zal de opzet van Van Schooten schetsen, en uit iedere fase van het traktaat een paar dingen naar voren halen en bespreken, zodat, naar ik hoop, een representatief beeld van deze tekenlessen overblijft.

2 Frans van Schooten

'Zo gaat hij de wetenschapsgeschiedenis in als een fakkeldrager van de Cartesiaanse wiskunde en als diens meest invloedrijke verkondiger – en als degene die de ontwikkeling van belangrijke nieuwe methodes voor ogen had, hoewel hij zelf niet in staat was geweest deze te initiëren.'[1]

Het onderwerp in bovenstaand citaat is Frans van Schooten (1615-1660), dezelfde die op het titelblad van het *Tractaet der Perspective* 'Professor Matheseos in de Universiteyt tot *Leyden*' genoemd wordt. Als zoon van een vader met dezelfde naam en functie, hij onderwees aan de ingenieursschool van Van Ceulen in Leiden, kreeg hij een 'grondige wetenschappelijke opleiding'[2] van huis uit mee. In 1631 werd Van Schooten (daarmee bedoel ik van nu af de zoon) student aan die universiteit, in 1646 volgde hij zijn vader op in zijn functie.

Het citaat – afkomstig uit *Frans van Schooten der Jüngere* van J.E. Hofmann, het standaardwerk over Van Schooten – laat niet veel aan het toeval over. Het staat ook niet op zichzelf; in het *Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek* (NNBW) staat onomwonden: 'Een groot wiskundige is Van S. echter niet geweest.'[3] Maar in de rol als 'fakkeldrager van de Cartesiaanse wiskunde' is Van Schooten breed geprezen. 'De man, die de verdienste toekomt de wiskundige ideeën van Descartes [...] voor zijn tijdgenoten toegankelijk te hebben gemaakt'[4], zegt dezelfde Hofmann. Die verdienste bestond er vooral uit dat hij een Latijnse vertaling van Descartes' (Franse) *Geometria* bezorgde, voorzien van commentaar en door het Latijn voor een grotere groep mensen toegankelijk. Volgens C. de Waard, die het artikel over Van Schooten in het NNBW schreef, meldde Descartes in een van zijn brieven dat 'van S. en Gillot behoorden tot de weinigen, die zijne *Geometrie* volmaakt begrepen'[5].

Hoewel Van Schooten dus met name om zijn Cartesiaanse verdiensten bekend is geworden, is het oordeel over de wiskundige Van Schooten natuurlijk wel ergens op gebaseerd. Wie naar zijn lijst met gepubliceerde werken kijkt, en daar de werken die rechtstreeks met Descartes te maken hebben weghaalt, houdt drie boeken over. Een boek over kegelsneden, een boek over de wiskunde van Viète en *Franscisci à Schooten Exercitationum Mathematicarum libri quinque*, waarvan ook een Nederlandse vertaling verscheen, *Mathematische Oeffeningen, Begrepen in vijf Boecken.* Een van de vijf boeken in de *Mathematische Oeffeningen* was een bewerking van het boek over kegelsneden.[6]

Zo lauw als de mening over zijn wiskundige verdiensten is, zo enthousiast is De Waard over de onderwijscapaciteiten van Van Schooten. Van Schooten, die mede dankzij aanbevelingen van Descartes twee jaar in Frankrijk verblijft, moet na zijn terugkeer, zo schrijft De Waard, 'Johan de Witt onder zijne leerlingen geteld heb-

[1] Hofmann [1962] p. 8. Vertaald uit het Duits.
[2] Hofmann [1962] p. 1.
[3] Molhuysen e.a. [1974] dl. 7 kolom 1113.
[4] Hofmann [1962] Omslagtekst. Vertaald uit het Duits.
[5] Molhuysen e.a. [1974] dl. 7, kolom 1110.
[6] Zie voor een compleet overzicht van Van Schootens publicaties Hofmann [1962] p. 53-54.

ben, gelijk ook weldra Chr. Huygens. Van zijn onderwijs zal een bezielende invloed zijn uitgegaan, want ook andere studenten, oorspronkelijk bestemd voor de studie der rechten of medicijnen, als waarschijnlijk Johannes Hudde [...] en zeker later Hendrik Heuraet, wist hij op het pad der wiskunde te lokken.'[7]
Volgens De Waard verwerkte Van Schooten vondsten van vrienden in zijn boeken. Hij schrijft: 'Zoo vindt men vraagstukken of wiskundige beschrijvingen van de amsterdamsche burgemeesters Andries van Oudtshoorn en Hudde [...] in Van S.'s *Exercitationes Mathematicae libri V.*' Dit blijkt ook uit het feit dat een traktaatje van Christiaan Huygens over kansrekening gevoegd wordt achter de *Exercitationes Mathematicae*, genaamd *Tractatus, de Ratiociniis in Aleae Ludo*, dat in de Nederlandse vertaling gedrukt wordt als *Tractaet, handelende van Reeckening in Speelen van Geluck*. Dit traktaat speelde volgens De Waard een belangrijke rol in de ontwikkeling van de kansrekening.

Wat opvalt als je de Latijnse uitgave van Van Schootens *Exercitationes* vergelijkt met de Nederlandse vertaling, is dat achterin de band van de vertaling niet alleen het werk van Huygens is toegevoegd, maar ook het perspectieftraktaat dat het onderwerp van deze scriptie is. De volledige titel van de vertaling, met weglating van de titels van de vijf afzonderlijke boeken, luidt: *Mathematische Oeffeningen, begrepen in vijf Boecken. Waer by gevougt is een Tractaet / handelende van Reeckening in Speelen van Geluck / door d'Heer Christianus Hugenius. Desen Druck vermeerdert met een korte verhandeling van de Fondamenten der Perspective.* De reden dat het traktaat niet achter de Latijnse versie van 1656/1657 zat, lijkt mij gelegen in het feit dat het traktaat pas in 1659 werd voltooid. Waarom het wel aan de Nederlandse vertaling is toegevoegd, blijft gissen.

Noch in het NNBW, noch in de *Dictionary of Scientific Biography*[8], noch in Hofmanns boek wordt er over dit perspectiefwerk gesproken. Ook Jan van Maanen behandelt het niet in zijn proefschrift[9]. David Bierens de Haan noemt het wel in zijn *Bibliographie Néerlandaise*[10]; het traktaat wordt gecatalogiseerd als bijvoegsel van de Mathematische Oeffeningen, maar 'men vindt ook apart' *Tractaet der Perspective*. Over de inhoud zegt hij evenwel niets. Overigens moet De Waard het wel ingekeken hebben, want bij het stuk over Petrus van Schooten in het NNBW, een halfbroer van Frans, refereert De Waard aan de laatste pagina van het traktaat, waar Frans iets zegt over de vertaling van Euclides' *Elementen* waaraan zijn broer Petrus op dat moment werkt.[11] Peter Schreiber schrijft in een artikel voor de *Companion Encycopedia of the History and Philosophy of Mathematical Sciences*: 'In het begin van de zestiende eeuw breidde het idee van centrale projectie zich uit naar andere landen, eerst naar Frankrijk (waar Jean Pelerin in 1505 het eerste grotendeels kloppende boek publiceerde), toen naar Duitsland (Albrecht Dürer, H. Rodler en anderen), en later naar Nederland (Simon Stevin en Frans van Schooten jr.) en Engeland (Brook Taylor).'[12] Daaruit blijkt dat hij wist van het werk van Van Schooten, maar het zegt niet of hij het daadwerkelijk heeft ingezien.

[7]Molhuysen e.a. [1974] kolom 1111.
[8]Gillispie [1970].
[9]Van Maanen [1987].
[10]Bierens de Haan [1883] p. 245.
[11]Molhuysen e.a. [1974] kolom 1116.
[12]Schreiber [1994] p. 1598. Vertaald uit het Engels.

3 Het Traktaat

In tegenstelling tot de inleidende woorden van de *Mathematische Oeffeningen*, die gericht zijn aan 'den President ende Raaden van 't Hof van Hollandt, Zeelandt *en* West-Vrieslandt', is de (korte) inleiding van dit traktaat gericht aan één persoon in het bijzonder, Andreas van Outshoorn. In het stuk van De Waard in het NNBW kwamen we de naam Andries van Oudtshoorn tegen, maar het lukt mij niet bevestigd te krijgen dat het hier om dezelfde persoon gaat. Beide Van Ou(d)tshoornen zijn overigens onvindbaar in het NNBW. Ook J.E. Elias' *De Vroedschap van Amsterdam*[13] levert (mij) geen uitsluitsel.
Op de Woudschotenconferentie 2007[14] hield Fokko Jan Dijksterhuis een voordracht waarin hij zei dat Van Schooten veel van zijn werk schreef in het kader van de nieuwe wiskunde die in de behoefte van de patriciërs voorzag. Zijn onderzoek op dat terrein is echter nog in de opbouwfase, en het is dus nog niet mogelijk om er conclusies uit te halen. De vraag of dit traktaat eventueel in een meer maatschappelijke context is geschreven, is op basis van dat onderzoek (voorlopig) niet te beantwoorden.
Van Schooten zet zelf uiteen dat hij ter 'af-lossing der schult, waer in ick door genoten vriendtschap en beleeftheyt ben vervallen' dit werkje geschreven heeft voor Van Outshoorn. Daarnaast stelt hij dat 'de Perspective alleen voor de wisse en waere teycken-konst is te houden', waarmee hij het belang – in zijn ogen – van de perspectieftekening beargumenteert. Belangrijkste argumenten voor het aanleren van deze 'konst' zijn enerzijds de dingen die men 'door woorden of geschrift niet volkomentlijck uytten of beschrijven kan', en anderzijds de mogelijkheid om direct te zien hoe bepaalde tekeningen 'haere gewisheyt bekomen'.[15]

Voor zover je op basis van één gelezen werk iets kunt zeggen over iemands capaciteiten, lijkt het erop dat deze les in perspectieftekenen de lovende woorden over Van Schooten als leraar bevestigt. De opbouw van het traktaat is zeer helder en gestructureerd. De opzet van het boek komt, afgezien van het voorwoord, grofweg op het volgende neer:

- Definities ('Bepalingen')
- Voorwaarden ('Begeerten')
- Stellingen ('Vertoochen')
- Oefeningen ('Werck-stucken')

Wie een hedendaags wiskundeboek inziet, komt meestal dezelfde volgorde tegen, maar dan per deelonderwerp gerangschikt. Van Schooten behandelt eerst alle definities en voorwaarden, en geeft dan achter elkaar alle stellingen die van belang zijn om ten slotte de oefeningen te geven. Hij werkt toe naar de toepasbaarheid van alle regels die hij in het begin geeft. Het doel lijkt om de lezer volgens die regels te leren perspectieftekenen. De gedachte achter de opbouw is heel simpel:

[13] Elias [1903].
[14] Een conferentie die uitgaat van de Landelijke Werkgroep Wetenschapsgeschiedenis. Zie voor meer informatie `http://www.gewina.nl/werkgroep/`
[15] Van Schooten [1659] p. 503-504.

als je een driedimensionaal figuur wilt projecteren op een vlak, dan volstaat het als je ieder punt in de ruimte, hoe het ook gepositioneerd is ten opzichte van het oog en het projectievlak, kunt aftekenen, en als je iedere lijn tussen twee punten kunt projecteren.

Als gezegd: het voert te ver om hier het hele boek minutieus te bespreken. Wat nu volgt is een selectie uit alle vier de 'hoofdstukken', die een beeld moet geven van de opbouw die Van Schooten heeft aangebracht.

3.1 De Bepalingen

1e Bepaling: Perspectiva, *Ars Scenographica*, ofte Schijnbaere teycken-konst, is een konst welcke door gewisse regulen alle dingen in 't plat leert teyckenen, gelijckerwys deselve haer op een gestelde plaets in 't ooch vertoonen.[16]

Deze definitie, die trouwens de eerste van de negen 'bepalingen' is die Van Schooten geeft, heb ik gekozen omdat die iets zegt over het onderwerp van het hele boek. Bovendien plaatst de uitleg die hij erbij geeft – terwijl deze definitie op het oog toch redelijk voor zich spreekt – het perspectieftekenen in een wat bredere context. Van Schooten zegt dat er drie soorten tekening zijn; de 'gront-teyckening', de 'stant-teyckening' en de in de definitie genoemde 'schynbaere teyckening'. Onder de Latijnse namen is deze indeling beter bekend: Iconographia, Orthographia en Scenographia zijn de namen die Vitruvius eraan gaf in zijn wereldberoemde *De Architectura*. Het zijn de drie verschillende tekeningen die men in de bouwkunde heeft; onder Iconographia (de gront-teyckening) vallen de tekeningen die wij 'plattegrond' zouden noemen. Orthographia (de stant-teycekning) laat staande objecten in hun ware gedaante zien; wij zouden zeggen: vooraanzichten. Bij deze twee vormen van tekening, Van Schooten geeft dat zelf ook aan, is de tekening gelijkvormig met het getekende, en is het niet noodzakelijk om bij de tekening de plaats van het oog te geven. Daar zit natuurlijk precies het verschil met de Scenographia, waarbij iedere nieuwe positie van het oog een nieuwe tekening oplevert. '[H]et wit der Perspective', zo schrijft Van Schooten, is dan ook de dingen 'Wiskonstelijck in 't plat sodanig te teyckenen gelijckerwijs die haer op een voorgestelde plaets in ons ooch gelaten.'[17] In zijn voorwoord aan Van Outshoorn had hij al geschreven dat dit voor 'Schilders, Glaes-schrijvers, Timmerlieden, Metselaers, Fabrijcken, Architecten, en Ingenieurs ten hoochsten nodig is'[18], waarmee hij het maatschappelijk belang van 'de Perspective' kracht had bijgezet.

In de andere acht bepalingen geeft Van Schooten namen aan de 'ingrediënten' van het perspectieftekenen; het projectievlak noemt hij het *glas*, de projectie zelf is de *afteyckening* en het te projecteren object het *teyckenlicke*. Dat waar het tekenlijke op staat noemen we de *vloer*, het tekenlijke wordt waargenomen door het *ooch* en alle lijnen die tussen dat oog en het tekenlijke getrokken zijn heten *straelen*. De *glas-grondt* is, zoals de naam al zegt, de snijlijn van het glas met de vloer, en de lijn die vanuit het oog loodrecht op de vloer staat is de *siender-liny*, waarvan het

[16]Van Schooten [1659] p. 505.
[17]Idem, p. 505.
[18]Idem, p. 504.

snijpunt met de vloer *voet* wordt genoemd.[19] Deze opsomming van alle definities lijkt misschien wat overbodig, maar voorkomt dat bij het bespreken van stellingen en oefeningen onduidelijkheden over de terminologie ontstaan.

3.2 De Begeerten

2e Begeerte: *Daer wort begeert:* Dat een teyckenlick punt, sijn afteyckening, en het ooch altijt in een rechte liny sijn. [...] Daer uyt dan volgt: Dat een teyckenlick punt, in het glas gegeven, aldaer oock voor zijn afteyckening verstreckt.[20]

Deze tweede van vier begeerten doet eigenlijk wat alle begeerten in dit traktaat doen: de intuïtie in woorden omzetten. Wie iets projecteert doet dat vanzelf door middel van rechte lijnen. Even duidelijk is het dat een tekenlijk punt in het glas zijn eigen aftekening is. Je kunt je afvragen waarom Van Schooten deze trivialiteiten opneemt, maar hij moet in een fatsoenlijk wiskundeboek natuurlijk precies zijn. Projectielijnen mogen niet krom zijn – dat zou immers oneindig veel projectiemogelijkheden geven als het oog, het glas, en het tekenlijk object bekend zijn. Om een andere begeerte nemen: het glas en de vloer zijn oneindige vlakken. Ook daarin zie je dat hij met de begeerten uitsluit dat je tegen praktische problemen aanloopt bij het perspectieftekenen. Verder hebben ze weinig waarde, en er valt, evenmin als bij de Bepalingen, weinig aan te snappen. Interessanter wordt het bij de Stellingen.

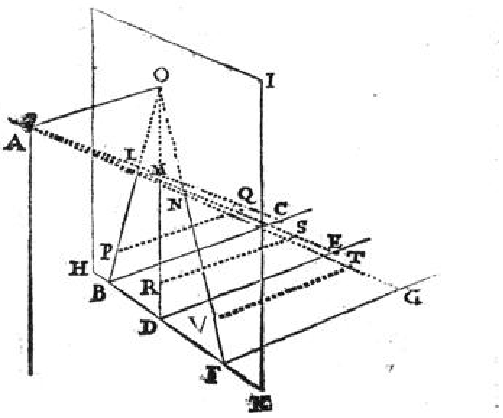
3.3 De Stellingen

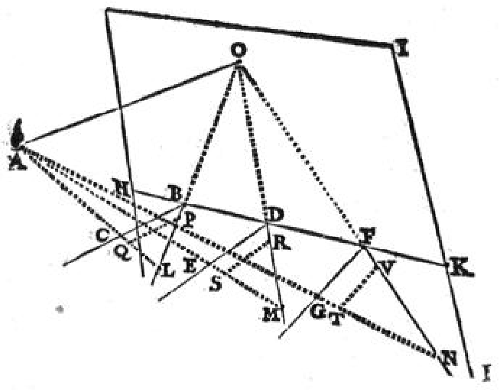
2e Vertooch: Soo het ooch even-wydige teyckenlicke rechte linien siet, die met de glasgrondt on-evenwydig sijn, dan sullen haere afteyckeningen op 't glas on-evenwydige rechte linien wesen, dewelcke voortgetrocken sijnde in een punt sullen versamen, daer 't glas van de liny, die uyt het ooch met de teyckenlicke linien even-wydig gehaelt wort, wert doorboort.[21]

Allezes de stellingen die Van Schooten bewijst alvorens naar de praktijk van het tekenen over te stappen, worden hetzelfde behandeld. Eerst wordt de stelling weergegeven, vervolgens legt Van Schooten uit wat er precies wordt beweerd, daarna volgt het bewijs, en ten slotte wat opmerkingen. We volgen Van Schooten in dit 'vertooch' om te zien hoe hij aan die opzet invulling geeft.
De stellingen en bewijzen (alsmede de werkstukken) zijn overigens rijk geïllustreerd. Het ligt voor de hand dat Van Schooten deze tekeningen zelf maakte. In het Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek staat: 'Waarschijnlijk door Golius kwam van S. in aanraking met Descartes en teekende tijdens het verblijf van den philosoof te Leiden in 1636 de figuren voor diens *Dioptrique* en *Meteores*' en even verder: 'voor Descartes *Principia* tekende hij ook de figuren'[22]. Van Schooten had

[19] Zoals al te zien is houd ik in de lopende tekst niet vast aan de 17e-eeuwse schrijfwijze van Van Schooten. Vanaf nu komt die alleen nog terug in citaten.
[20] Van Schooten [1659] p. 511.
[21] Van Schooten [1659] p. 514.
[22] Molhuysen e.a. [1974] kolom 1110-1111.

dus al voor Descartes tekeningen gemaakt, en blijkbaar naar tevredenheid, want het bleef niet bij één boek. Hoe dan ook had hij enige ervaringen met tekeningen.





Hiernaast staan de twee tekeningen die Van Schooten bij deze stelling afbeeldde. De tekst die hij erbij geeft is het makkelijkst om te volgen in de bovenste figuur. Zoals gezegd legt hij eerst uit wat het gestelde inhoudt: zij A het oog, HI het glas, HK de glasgrond en BC, DE en FG de verschillende evenwijdige lijnen die niet met de glasgrond evenwijdig zijn, met B, D en F in de glasgrond. Stel nu dat L, M en N de aftekeningen zijn van C, E en G, en de lijnen BL, DM en FN worden getrokken in HI. (Deze laatstgenoemde lijnen vormen de aftekening van de drie evenwijdige lijnen in de vloer, volgens de eerste stelling die hiervoor door Van Schooten is behandeld.[23]) Trek dan de lijn AO vanuit A evenwijdig met BC, DE en FG, zodanig dat O het snijpunt met HI is. Dan moet bewezen worden dat BL, DM en FN niet evenwijdig zijn, en dat deze drie lijnen, mits ver genoeg doorgetrokken, in O elkaar snijden.

Nu volgt het bewijs van Van Schooten. BC en AO zijn evenwijdig, en beide lijnen worden doorsneden door de lijn AC. Daarom liggen deze lijnen in één vlak. Nu BC, AO en AC in één vlak liggen, ligt ook BL in dat vlak. Voor deze twee stappen maakt Van Schooten gebruik van stellingen uit Euclides' *Elementen*. Hij verwijst naar het 11$^{\mathrm{e}}$ boek, voor respectievelijk de zevende en de tweede stelling. De zevende stelling zegt dat als twee lijnen parallel zijn, iedere lijn die de twee parallelle lijnen verbindt, met de twee parallelle lijnen in één vlak ligt. Dat is werkelijk precies wat Van Schooten in zijn eerste stap nodig heeft. De tweede stelling uit dat elfde boek van de Elementen lijkt hier heel erg op; deze zegt dat twee snijdende lijnen in een (uniek) vlak liggen. Daaruit volgt natuurlijk dat drie lijnen die elkaar in drie groepjes van twee snijden (en dus een driehoek vormen), ook in één vlak liggen. Daarom ligt BL in het vlak met BC, AO en AC, want BL maakt met AC en BC een driehoek. Dan zegt Van Schooten: 'Daerom deselve BL dan insgelijcx in 't plat van BC, AO sijn sal / en om sulcks voortgetrocken zijnde de liny AO sal ontmoete.'[24] Dat is wat kort door de bocht, want hij heeft inderdaad laten zien dat B, L en O in één vlak liggen, maar dat houdt niet automatisch in dat O in het verlengde van BL ligt. Dat dat hier wel het geval is, heeft te maken met het

[23] Van Schooten [1659] p. 513.
[24] Van Schooten [1659] p. 515.

gegeven dat B, O en L ook in een ander vlak liggen, namelijk HKI. De drie punten liggen dus op de snijlijn van het vlak HKI en het vlak AOBC, en daarom op één lijn.
Nu, dezelfde redenering kan natuurlijk ook toegepast worden voor DM en FN, en dus ligt O in het verlengde van BL, DM en FN. Uit het feit dat BL, DM en FN in één vlak liggen en (mits doorgetrokken) samenkomen in één punt (namelijk O), blijkt eenvoudig dat ze niet evenwijdig zijn. Het punt O, waar de drie lijnen samenkomen, noemt Van Schooten het *Saempunt*.
In het bovenste plaatje staan ook de lijnen PQ, RS en VT getekend; daarover zegt Van Schooten in een korte alinea nog dat ze buiten de vloer liggen, maar dat precies hetzelfde stappenplan ook op die lijnen van toepassing is. Dat is inderdaad juist; drie evenwijdige lijnen die niet met de glasgrond evenwijdig zijn, snijden altijd ergens het glas. Verder kan de redenering worden overgenomen; nergens werd gebruik gemaakt van het feit dat BC, DE en FG in de vloer lagen. Daarmee is de stelling bewezen.

Na dit bewijs merkt Van Schooten op dat hoe lang je BC, DE en FG ook neemt, hun aftekening nooit in O zal uitkomen. Hoe verder je C, E en G neemt, hoe hoger de aftekeningen L, M en N op de lijnen BO, DO en FO zullen komen. Maar pas als je BC, DE en FG in het oneindige doortrekt, zal de aftekening in O terechtkomen. Sommige schrijvers in de perspectiefleer noemen dit punt O het oog, zo schrijft Van Schooten, maar dat vindt hij 'on-eygentlijck en sonder fondament'[25], want het punt O verbeeldt alleen de plaats waar BC, DE en FG schijnen samen te komen, en bovendien kan het oog nooit samenvallen met het glas, als je een aftekening wilt vinden.

Opvallend is dat Van Schooten iets vergeet in deze stelling. Hij heeft over evenwijdige, tekenlijke rechte lijnen die met de glasgrond onevenwijdig zijn, maar als extra voorwaarde zou moeten worden toegevoegd dat ze in de vloer moeten liggen of op z'n minst daaraan evenwijdig moeten zijn. Immers, als de drie evenwijdige lijnen bijvoorbeeld loodrecht op de vloer staan, voldoen ze aan alle voorwaarden in de stelling, maar is hun aftekening toch echt ook evenwijdig[26]. Het is des te meer opvallend, omdat Van Schooten precies die voorwaarde wel noemt in zijn derde stelling; daar spreekt hij van lijnen 'die in de vloer syn of met deselve even-wydig, maer met de glasgrondt on-evenwydig'[27].

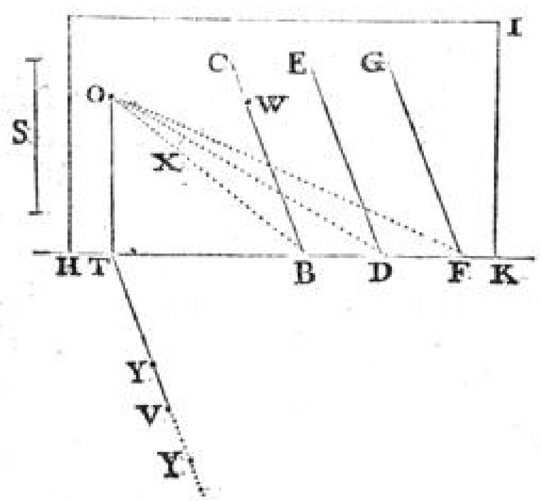
Deze kleine onzorgvuldigheid ten spijt bouwt Van Schooten zijn stellingen keurig op. Bijna elke keer maakt hij gebruik van stellingen die hij al bewezen heeft. Na de zes stellingen acht Van Schooten voldoende verklaard ''t geene tot grondige kennis van de fondamenten der Perspective van ymandt nodig soude mogen geoordeelt worden', en gaat hij door naar de werkstukken. Daarvan zal ik er nog drie behandelen, waarvan twee in de volgende paragraaf.

[25] Van Schooten [1659] p. 516.
[26] Zie voor een bewijs daarvan stelling 5 in Van Schooten [1659] p. 520.
[27] Van Schooten [1659] p. 516.

3.4 De Werkstukken

1e Werck-stuck Gegeven zijnde on-eyndige even-wydige teyckenlicke rechte linien in de vloer, on-evenwydig met de glas-grondt, waer op het glas rechthoeckig verdacht wort op de vloer, de voet, en sienders lengte: haer afteyckening te vinden.[28]

Dit is het eerste werkstuk dat Van Schooten behandelt, en hoewel het niet het meest interessante is, is het toch nodig voor het tweede werkstuk dat ik graag wil bespreken. Bovendien laat het goed zien hoe alle stellingen en werkstukken met elkaar verbonden zijn, als een hecht geheel opgesteld.
De tekeningen in het traktaat zijn natuurlijk het eindresultaat van de werkstukken, waarin het er telkens om draait, gegeven een tekenlijk punt, het glas en de positie van het oog, de aftekening te vinden. Hoe komt die aftekening tot stand? Dat is wat Van Schooten hier telkens laat zien. Eerst legt hij, net als bij de stellingen, uit wat de bedoeling is (''t Gegeven'), vervolgens geeft hij de constructie (''t Werck') en daarna laat hij zien waarom die constructie correct is (''t Bewijs).



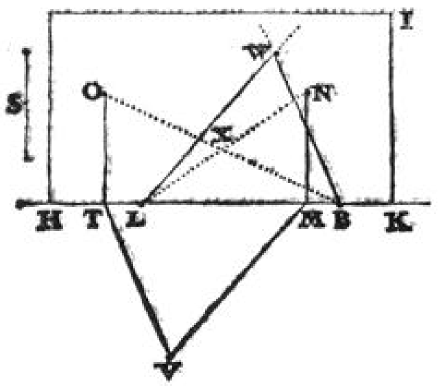
Op het plaatje hiernaast staan drie evenwijdige lijnen, onevenwijdig met de glasgrond. Dat doet natuurlijk meteen denken aan de hiervoor behandelde stelling. Niet voor niets, zal straks blijken in het bewijs. Gegeven zijn BC, DE en FG evenwijdig aan elkaar, het glas HKI en de voet V. De lijn S geeft de afstand aan tussen de voet V en het (hier niet getekende) oog. Hoe nu te werk te gaan? Van Schooten zegt: trek de lijn VT evenwijdig aan de drie gegeven evenwijdige lijnen, teken vervolgens uit T loodrecht op HK de lengte S af, zodanig dat TO ontstaat. Nu zijn de lijnen OB, OD en OF de respectievelijke aftekeningen van BD, DE en FG.

In het bewijs begint Van Schooten ermee te zeggen dat je je in moet beelden dat je het glas HI draait over de as HK zodanig dat het in het vlak met BC, DE en FG komt te liggen. Als het glas in die positie is, kun je de lijnen OT, OB, OD en OF trekken. Als je daarna het glas weer terugdraait naar zijn oorspronkelijke positie, komt de lijn OT rechthoekig op de vloer te staan. T bevindt zich nu recht boven O, op dezelfde afstand als het oog zich (recht) boven V bevindt. De lijn uit O naar het oog is dus evenwijdig met VT, en daarom ook evenwijdig met BC, DE en FG. Nu zijn we precies in de situatie van de stelling van zo-even beland, en dus concludeert Van Schooten dat O het 'saem-punt' is van BC, DE en FG. Uit de stelling volgde dat de aftekening van evenwijdige rechte lijnen (onevenwijdig aan de glasgrond) samenkomen in dat 'saem-punt' en dus is hiermee de constructie van de aftekening van de drie evenwijdige lijnen gerechtvaardigd.
Wat misschien nog opvalt in de tekening is dat er drie letters in staan die in het

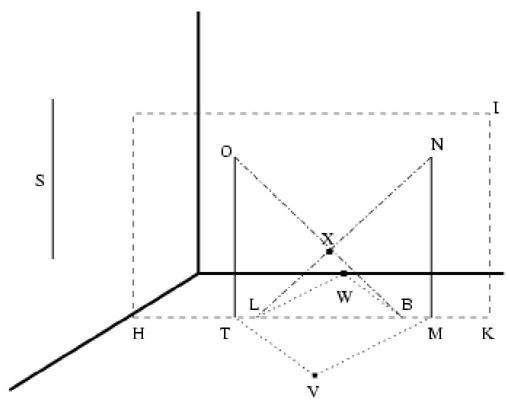
[28] Van Schooten [1659] p. 527.

bewijs niet genoemd worden. In de opmerkingen die Van Schooten bij deze stelling maakt, zegt hij dat ieder punt W op de lijn CB in de aftekening altijd tussen B en O moet liggen. X stelt die aftekening voor. De twee punten Y die op de lijn VT (of het verlengde daarvan) getekend zijn, gebruikt Van Schooten om op te merken dat als je een andere voet Y op VT (of het verlengde daarvan) kiest, de aftekening van de oneindige lijnen gelijk blijft. (Al geldt natuurlijk wel dat hoe verder je Y van T af kiest, hoe dichter de aftekening X (van W) bij B komt te liggen.)

2e Werck-stuck Gegeven sijnde een teyckenlick punt in de vloer, de glas-grondt, waer op het glas recht-houckig verdacht wort op de vloer, de voet, en sienders lengte: sijn afteyckening te vinden.[29]



Links is het plaatje afgedrukt dat hoort bij dit werkstuk. Wat opvalt is dat Van Schooten vanaf pagina 527, het begin van de werkstukken, bij de plaatjes in het traktaat nauwkeurig aangeeft hoe je de 'opstelling' van de perspectieftekeningen moet lezen. Hij geeft de plaatsing van de tekenlijke punten, het oog en het glas ten opzichte van elkaar en de vloer weer. Dat heeft een reden: de plaatjes zijn geen perspectieftekeningen meer, maar hulptekeningen. Zoals je in de transcriptie kunt zien zijn er bij werkstuk 2 (pagina 529) nog maar twee opties – het glas tussen het oog en het tekenlijk punt, en het tekenlijk punt tussen het oog en het glas – maar dat aantal breidt zich uit bij meer ingewikkelde constructies. In het vijfde werkstuk (pagina 535 e.v.) zijn bijvoorbeeld acht verschillende opstellingen mogelijk, en Van Schooten tekent ze allemaal. Over hoe je deze hulptekeningen bekijken moet volgt meer in paragraaf 3.5. Voor dit werkstuk volstaat de tekening rechts, met een modernere weergave van de situatie.



In dit werkstuk is W een tekenlijk punt in de vloer, HK de glasgrond, HI het glas dat een rechte hoek maakt met de vloer en V de voet. De afstand van V tot het oog is gelijk aan het lijnstuk S. Hoe vind je nu de aftekening van W op HI?
Trek uit W de lijn WB tot aan de glasgrond 'soo 't valt'; daarmee bedoelt Van Schooten: willekeurig. Trek vervolgens VT evenwijdig aan deze lijn WB, zodanig dat T ook op de glasgrond ligt. Teken vervolgens TO af, met TO in lengte gelijk aan de gegeven lengte S. Dan, zegt Van Schooten, is de lijn uit O naar B de aftekening op het glas van BW, mits BW in het oneindige doorgetrokken is. Het bewijs van die bewering is precies wat in het eerste werkstuk is behandeld. Op dezelfde manier kun je WL (willekeurig) trekken, VM daaraan evenwijdig, en MN met lengte S in het vlak HI tekenen, waarna NL natuurlijk de

[29] Van Schooten [1659] p. 529.

aftekening is van de lijn LW, mits deze ook oneindig lang zou zijn. Dan is het punt X, het snijpunt van NL en OB, de aftekening van W, aldus Van Schooten.

Waarom? Van Schooten gebruikt veel woorden voor de beantwoording van deze vraag. Maar zijn argument is in een paar woorden samen te vatten. Nu het eerste werkstuk is bewezen, is duidelijk dat de lijnen OB en NL de aftekening zijn van de (oneindig ver doorgetrokken) lijnen BW en LW. Aangezien het punt W zowel op BW als LW ligt, maakt de aftekening van W deel uit van OB én NL. Daarom moet de aftekening van W wel het snijpunt van deze twee lijnen zijn.

3.5 De illustraties

Zoals gezegd verandert er iets aan de illustraties vanaf pagina 527. Tekeningen zoals op pagina 508 of pagina 520 zijn duidelijk, en laten een bepaalde diepte zien. In eerste instantie probeerde ik die diepte ook in de tekeningen bij de werkstukken te onttekken, tot ik mij realiseerde dat die er met opzet niet is.
Van Schooten zegt zelf dat de werkstukken er zijn om het geleerde in de praktijk te brengen.[30] Om iemand voor te doen hoe je op een projectievlak de aftekening vindt, heb je natuurlijk niets aan een afbeelding met diepte. Je hebt een afbeelding nodig waarin het projectievlak op ware grootte wordt getekend, zodat je er in kunt tekenen. Dat is wat mogelijk is met de plaatjes van Van Schooten.

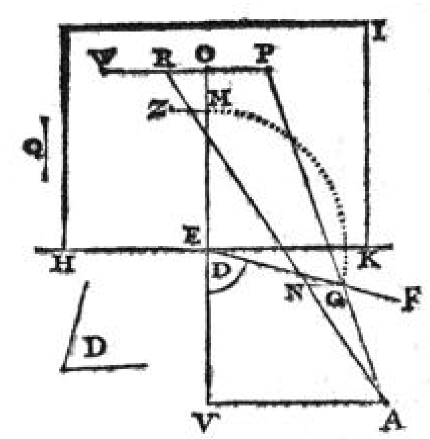
Kijk bijvoorbeeld naar de tekening die bij het eerste werkstuk hoorde. Dat ziet er nog eenvoudig uit. Je moet dat plaatje benaderen als een bovenaanzicht van de af te tekenen situatie. De lijnen BC, DE, FG en het punt V zijn op ware grootte en afstand van elkaar getekend. Ook de lijn HK, de snijlijn van het glas met de vloer, is onderdeel van dat bovenaanzicht. Maar het glas HI is negentig graden gedraaid, en op ware grootte in de vloer gelegd. Dat is ook precies waar Van Schooten zijn bewijs mee begint; 'Want verdenckende dat op HK als as het glas HI kan gedraeyt wordē / en dat op het selve neder-gelegt wesende de linien OT, OB, OD, en OF, die wy op de vloer of 't plat van 't bladt (even als al d'ander) gehaelt hebben / sijn afgetrocken' [31]. Kortom: draai het glas en teken er dingen op af. Als je dus een perspectieftekening wilt maken, teken je op het blad waarop dat gebeuren moet een bovenaanzicht van de situatie, en trek je de lijnen zoals die door Van Schooten worden voorgeschreven. Aan de hand daarvan kun je de aftekeningen vinden.

Dit soort hulptekeningen was in de zeventiende eeuw een logisch gevolg van de ontwikkeling van de perspectieftekening, zo schrijft P.J. Booker in *A History of Engineering Drawing*. 'Bijna alle kunstenaars en andere mensen die zich in die dagen bezighielden met geometrie, waren met name, of zelfs alleen maar, bezig met de ontwikkeling van perspectivische projectie. Daarmee hielpen ze automatisch ook de wetenschappelijke ontwikkeling van plattegronden, vooraanzichten en hulptekeningen, die ze nodig hadden voor veel van hun perspectiefconstructies.'[32] De specifieke tekenmethode van Van Schooten wordt niet behandeld in Bookers boek, maar wel verwante technieken.

[30] Van Schooten [1659] p. 526.
[31] Van Schooten [1659] p. 527.
[32] Booker [1979] p. 34. Vertaald uit het Engels.

De tekening van pagina 527 is vrij eenvoudig te doorzien. Wat lastiger wordt het bij de de tekening op pagina 536, waar Van Schooten uitlegt hoe een punt dat boven of onder de vloer ligt, afgetekend moet worden op een hellend projectievlak. We zullen dit werkstuk, mijns inziens het pittigste in het traktaat, doorlopen, zodat de constructie van het plaatje duidelijk wordt, en daarmee ook het bewijs van Van Schooten.

5^e^ Werkstuk: Gegeven sijnde een teyckenlick punt boven of beneden de vloer, de glas-grondt, waer op het glas in een gegeven hoeck scheef-hoeckig op de vloer verdacht wort, de voet, en sienders lengte: sijn afteyckening te vinden.



De situatie is als volgt: er is een voet V, een oog A dat op gegeven afstand boven V ligt, een hellingshoek D van het glas met de grond, een punt op de vloer W en een lengte Q die de afstand tussen dit punt W en het tekenlijke punt recht boven of onder W aangeeft. Als voorheen is HK de glasgrond, en HI het glas. hiernaast staat het eerste van acht plaatjes die Van Schooten bij dit werkstuk geeft. Het gaat hier om het (meest inzichtelijke) geval waar het tekenlijk punt boven de vloer ligt, en het glas tussen het oog en het tekenlijk punt staat en naar het oog toe helt. De tekening is op het eerste gezicht lastig te doorgronden, en bevat veel letters die nog niet gedefinieerd zijn, maar als je door de voorgeschreven werkwijze en het bewijs heenloopt, wordt duidelijk hoe de structuur in elkaar zit.

De werkwijze.

1. Trek uit V de lijn VE[33] rechthoekig op HK en vanuit W de lijn WO evenwijdig aan HK, zodanig dat de twee getrokken lijnen snijden in O.

2. Neem OP in het verlengde van WO gelijk aan de gegeven afstand Q.

3. Trek de lijn AP.

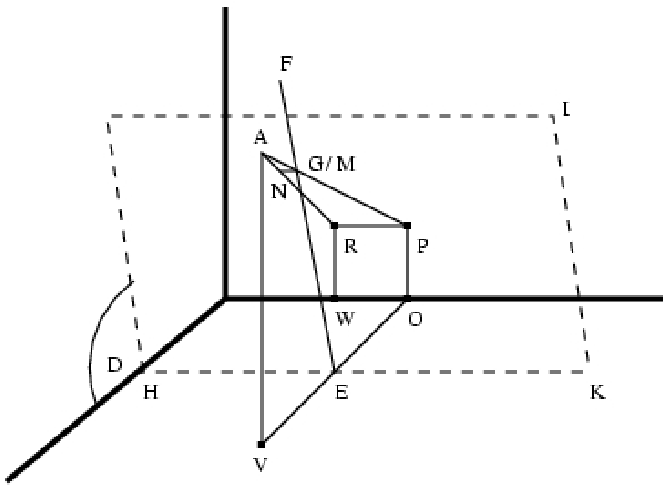
4. Trek de lijn EF vanuit E die met VE een hoek maakt van de gegeven grootte D. Noem het snijpunt van EF met AP G. (Dit snijpunt is er altijd; als het er niet is, is de lijn AP evenwijdig aan EF, en is dus de straal vanuit het oog A naar het punt P evenwijdig aan het projectieglas. Dan is er dus helemaal geen projectie, en is het werkstuk nutteloos. Van Schooten zegt dat ook, maar pas helemaal aan het eind van zijn opmerkingen over dit werkstuk: 'wanneer APG met FEG noyt te saemen komt of d' een d' ander komt te doorsnyden / dan mede de afteyckening van elck een der punten boven of beneden W en O gegeven niet en kan gevonden worden.'[34])

5. Teken op PW het punt R af, zodanig dat PR de lengte van WO heeft. (Met als gevolg dat WR nu lengte Q heeft.) Trek AR.

[33] Merk op dat Van Schooten hier per ongeluk VD in plaats van VE schrijft.
[34] Van Schooten [1659] p. 539.

6. Trek uit G een lijn evenwijdig met HK die AR snijdt. Noem het snijpunt N.
7. Teken op (het verlengde van) VE het punt M af, zodanig dat EM = EG. (Dit wordt in het plaatje weergegeven door de omgecirkelde afstand EG.)
8. Teken vanuit M evenwijdig aan HK de afstand GN af, in de richting van W. Noem het eind van dit lijnstuk Z. Z is de aftekening van het punt boven W.

Nu zijn alle letters en lijnen in het plaatje verklaard. Nogmaals: ook hier legt Van Schooten onder het kopje ''t Werck' de nadruk op hoe er getekend moet worden. Het verantwoorden van de werkwijze doet hij pas in het bewijs. Iemand voor wie de bewijzen te moeilijk zijn, kan toch, als hij (of zij) vertrouwt op de methoden van Van Schooten, een perspectivische aftekening maken.



Van Schooten begint zijn bewijs met uit te leggen hoe je in zijn tekening de werkelijkheid kunt aflezen. Zoals in de eerder behandelde werkstukken heeft hij het projectieglas gedraaid naar de vloer. Als je nu de lijnen VA, EF, OP en WR kantelt naar links over een hoek van negentig graden, zodat VA, OP en WR rechthoekig op de vloer staan, en EF een hoek van D graden met de vloer maakt, en dan aanneemt dat de lijnen AP, AR, GN en RP meekomen, krijg je de driedimensionale situatie. Hierboven kun je zien hoe dat eruit ziet, in een projectie zoals je die tegenwoordig op school leert tekenen.
In dat plaatje kun je goed de opmerking van Van Schooten herkennen dat FEG en VEO 'te samen de waere gestalte van 't glas met de vloer sullen aenwysen.' Als je het glas naar zijn juiste positie draait valt EM op EF en valt M precies in G. Dit punt M is de aftekening van P, logisch, want het ligt op de lijn AP en in het vlak HI. Dan komt een wat lastiger deel van het bewijs dat ik weer stapsgewijs zal behandelen.

1. Omdat WO met HK evenwijdig is, en RP evenwijdig met WO en dus met HK is de aftekening van RP evenwijdig aan HK, volgens het vierde vertoog[35].
2. Aangezien M de aftekening van P is, volgt uit het voorgaande dat de aftekening van R (die we uiteindelijk zoeken) op de lijn door M evenwijdig aan HK ligt. De vraag die nu nog rest is: hoe ver van M ligt de aftekening van R?
3. Laten we de aftekening van RP op het glas XM noemen. Dan, omdat XM evenwijdig is aan RP, is driehoek AXM gelijkvormig met driekhoek ARP, en dus RP:XM = AP:AG.

[35]Zie Van Schooten [1659] p. 518 e.v.

4. Uit de tekening van Van Schooten volgt dat, omdat RP en GN evenwijdig zijn, RP:NG = AP:AG. (Hij kan deze verhouding toepassen omdat hij de tekening zo heeft geconstrueerd dat RP en AP op ware grootte zijn afgebeeld.)

5. Uit de twee voorgaande punten volgt dat MX even lang is als GN. Dat was precies de instructie in de werkwijze van Van Schooten: Teken vanuit M evenwijdig aan HK de afstand GN af. Daarmee is die werkwijze gerechtvaardigd.

Eigenlijk is dit werkstuk een genaralisering van de werkstukken 2 tot en met 4. Een punt in de vloer is een bijzonder geval van een punt boven de vloer, en bij een glas dat rechthoekig op de vloer staat, moet je voor D 90 graden invullen. Zoals gezegd is daarmee het meest ingewikkelde in dit traktaat wel achter de rug. Van Schooten behandelt in de laatste twee werkstukken nog twee constructies waarbij het projectieglas evenwijdig aan de vloer is. Daarmee heeft hij in principe alle varianten van af te tekenen punten behandeld. Iedere projectie van een punt op een glas vanuit een oog kun je nu reduceren naar een geval dat is onderwezen.

Met die constatering besluit Van Schooten ook abrupt zijn boek: 'Hierom nadien wy tot hier toe geleert hebben / hoedanig men in yder gestalte van 't glas de afteyckening van een teyckenlick punt kan vinden / het welck in / boven / of beneden de vloer is gegeven / waer in dan als verhaelt is het vinden der afteyckening van yder teyckenlicke figuer 't sy vlacke of lichaemelicke bestaet: so sullen wy alhier van dese verhandeling der perspective een eynde maecken'.[36] Daarna zegt hij nog iets over het werk van zijn broer Petrus, waaraan Schreiber al refereerde, maar verder ontbreekt hem de tijd om er uitgebreider op in te gaan. Want, zo zegt Van Schooten, hij vindt het genoeg 'dat wy alleenlijck seggen deselve [de Fondamanten der Perspective, JB] hier in te bestaen: namentlijck / hoedanig de by-gebrachte manieren in het teyckenen van allerhande vloeren / trappen / gebouwen / fortressen / sonne-wysers en andre voorvallende saecken in het werck te stellen sijn / sulcx dat men met de weynichste linien de afteyckening van veele punten 't seffens vinden en daer door de begeerde afteyckening op het alderkortste kan bekomen.'[37]

[36] Van Schooten [1659] p. 543.
[37] Van Schooten [1659] p. 543.

4 Conclusie

Hoewel het traktaat maar 43 pagina's telt, is het bestek van een bachelorscriptie als deze te kort om alle vragen erover te beantwoorden. Wat erin staat is duidelijk; Van Schooten heeft de basisbeginselen van het perspectieftekenen behandeld. Niet voor niets heeft hij het over de 'Fondamenten der Perspective'. Het is een goed gestructureerd en zover ik kan nagaan kloppend verhaal. Zijn stellingen en bewijzen zijn goed te volgen, maar het is natuurlijk onduidelijk in hoeverre zijn wiskunde ook voor de lezers toen begrijpelijk was.

Daar doemt dan ook een van de vervolgvragen op: welke plaats heeft dit traktaat in het aanbod van wiskundige verhandelingen over perspectieftekenen in de tijd van Van Schooten? Voegde Van Schooten iets toe aan de bestaande lectuur? Daarnaast staat de vraag hoe Van Schooten aan zijn kennis kwam. Was het een voortvloeisel van de lessen die hij kreeg en gaf aan de ingenieursschool in Leiden, of is uit boeken die voor zijn tijd verschenen, van wiskundigen als Marolois en Dürer, af te leiden dat hij die heeft ingezien voor hij dit traktaat schreef? En wie was Andreas van Outshoorn, aan wie Van Schooten zijn werk opdraagt? Kan daaruit misschien het waarom van dit boekje verklaard worden?

De vragen over de technische kant van de zaak zouden bestudeerd kunnen worden door het perspectiefwerk van voorgangers van Van Schooten te bekijken. Ook kan aan de hand van andere Nederlandse boeken over perspectieftekenen gekeken worden of dit traktaat misschien door de taal waarin het geschreven is in een behoefte voorzag. Als dat onderzoek uitwijst dat Van Schooten eigenlijk iets wat al bestond toevoegde aan de publicaties in die tijd, kan het antwoord misschien gevonden worden in de genoemde verhoudingen met de patriciërs die Van Schooten wellicht had.

Tot die vragen beantwoord zijn, rest hier alleen een oordeel over het inhoudelijke werk. Een degelijk, op de praktijk gericht leerboekje, dat ons in ieder geval bevestigt dat Van Schooten meer kon dan alleen het gedachtegoed van Descartes onder de aandacht brengen.

Jan Beuving

Referenties

[1] Schooten, F.J. van [1659] Tractaet der Perspective, in: F.J. van Schooten, *Mathematische Oeffeningen, begrepen in vijf boecken. Waer by gevougt is een Tractaet / handelende van Reeckening in Speelen van Geluck / door d'Heer Christianus Hugenius. Desen Druck vermeerdert met een korte verhandeling van de Fondamenten der Perspective.*, 1659, Gerrit van Goedesbergh, Amsterdam, p. 501-543.

[2] Bierens de Haan, D. [1883] *Bibliographie Néerlandaise Historique - Scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aus 16e, 17e et 18e siècles sur les sciences Mathématiques et Physiques avec leurs applications*, Imprimerie des sciences mathématique et physiques, Rome.

[3] Booker, P.J. [1963] *A History of Engineering Drawing*, Chatto and Windus Ltd. Herdruk met toevoegingen in 1979, Northgate Publishing Co. Ltd., Londen.

[4] Elias, J.E. [1903] *De Vroedschap van Amsterdam – 1578 - 1795*, Vincent Loosjes, Haarlem. 2 delen.

[5] C.C. Gillispie (red.) [1970] *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner's Sons, New York. 18 delen.

[6] Heath, T.L. [1956] *The Thirteen Books of Euclid's Elements – translated from the text of Heiberg*, 3 delen, Cambridge University Press, Dover Publications Inc., New York.

[7] Hofmann, J.E. [1962] *Frans van Schooten der Jüngere*, Franz Steiner Verlag GMBH, Wiesbaden.

[8] Maanen, J.A. van [1987] *Facets of Seventeenth Century Mathematics in the Netherlands*, Drukkerij Elinkwijk, Utrecht. Proefschrift.

[9] Molhuysen, P.C., P.J. Blok, L. Knappert en F.K.H. Kossmann (red.) [1911] *Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek*, Sijthoff, Leiden. Herduk in 1974, 11 delen.

[10] Schreiber, P. [1994] Art and Architecture, in: I. Grattan-Guinness (red.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Routledge, New York en Londen. Deel 2, p. 1593-1611.