Meetkunde met Frans van Schooten Junior (1615-1660)

[Henk Hietbrink]

Onderbouw

Meetkunde heeft in de onderbouw twee gezichten: die van technische vaardigheden en die van de contexten. Technische vaardigheden zijn bijvoorbeeld het vinden van *F*- en *Z*-hoeken en het construeren met een passer. Contextuele opdrachten gaan over het verdelen van grond of het berekenen van de hoogte van een toren. Op mijn school wordt het onderwerp meetkundig redeneren in 3-vwo alleen aangeboden aan de toekomstige wiskunde-B leerlingen. Ook de wiskundemethode heeft het onderwerp in een apart B-hoofdstuk opgenomen aan het einde van het schooljaar. Dat vond ik jammer voor de A-leerlingen omdat met de meetkunde ook het redeneren werd overgeslagen. Zo kwam bij mij de vraag op hoe dit onderwerp boeiend gemaakt kon worden voor A-leerlingen.

Eerst geef ik aan waarom meetkundig redeneren een plaats verdient in het wiskundeprogramma en hoe geschiedenis een opdracht inhoudelijk kan verrijken. Daarna kom ik met opdrachten en uitwerkingen.

Redeneren

Leerlingen zijn dol op argumenteren en ze worden er ieder jaar beter in. Ze hebben een mening over school, politiek of de actualiteit en met het verstrijken der jaren is hun betoog steeds beter opgebouwd. Vanuit deze invalshoek heb ik gezocht naar een aanpak die leerlingen motiveert om een meetkundige redenering op te zetten. Leerlingen begrijpen dat het moeilijk is om zware criminelen veroordeeld te krijgen. Ook al maakt een aanklager negen zinnige beweringen, hij gaat onderuit als de advocaat hem pakt op één onzinnige. Bij economie of maatschappijleer is de keten van oorzaak en gevolg niet altijd overzichtelijk en liggen feiten en meningen dicht bij elkaar. De wiskunde van vergrotingen en *F*- en *Z*-hoeken is daarentegen overzichtelijk, feitelijk en vrij van opinies. Daarom verdient meetkundig redeneren een plek in het wiskundeonderwijs als leeromgeving in feitelijk redeneren. Nadeel van meetkunde is echter dat de meeste redeneringen zo abstract zijn en zonder praktisch nut. Mijn idee was om contexten te gebruiken die leerlingen wel zinvol vinden. Die contexten vond ik in de zeventiende eeuw in de Republiek der Nederlanden.

Geschiedenis als stimulans

Met de zeventiende-eeuwse landmeter introduceerde I. van Gulik-Gulikers [1] een historische context bij het onderwerp gelijkvormigheid. Opdrachten kregen nut en samenhang. De uitstapjes naar de oorspronkelijke teksten, de geschiedenis van de Nederlanden in de zeventiende eeuw en de door landmeters gebruikte instrumenten motiveerden leerlingen om zich te verdiepen in het onderwerp. Zij heeft hierover boeiend geschreven in haar proefschrift *Meetkunde opnieuw uitgevonden*. Haar conclusie is dat een historische context opdrachten aantrekkelijk kan maken, maar ook dat oorspronkelijke oude teksten afstoten en dat een deel van de leerlingen terugschrikt voor grote opdrachten en zich veiliger voelt bij overzichtelijke deelopdrachten.

Frans van Schooten

Ik heb gekozen voor Frans van Schooten Senior (1581-1646) en Junior (1615-1660). Beiden gaven reken- en meetkundeles aan de Duytsche Mathematicque, de Leidse Ingenieursschool. Ook doceerden ze vestingbouw, landmeetkunde en perspectief tekenen. De tachtigjarige oorlog was de bloeitijd van de Nederlandse belegeringskunde. Hun leerlingen waren timmerlui, landmeters, vestingbouwers, maar ook kunstschilders. Van Schooten Junior gaf ook privéles aan kinderen van gefortuneerde ouders, bijvoorbeeld aan Christiaan Huygens. Ook verwierf hij een academische positie met zijn studies over Viète, zijn bijdrage aan Descartes *Geometrie* en zijn eigen studie naar tekeninstrumenten voor kegelsneden.

Experimenteel lesmateriaal

Verschillende lespakketten heb ik gemaakt. Iedere lespakket grijpt terug op een constructie van Frans van Schooten Junior. Doel is om leerlingen in één les van zestig minuten een complexe meetkundige redenering aan te bieden met een pakkende context. Dit experimentele materiaal heb ik ontwikkeld dankzij de NWO-regeling *Leraar in Onderzoek*. Het materiaal is beschikbaar gesteld op de website *www.fransvanschooten.nl*. Daar staan (interactieve) opdrachten, applets, uitwerkingen, een docentenhandleiding, posters, biografieën en achtergrondinformatie voor docent en leerling.

Doelgroep: onderbouw-A

De historische inkleding van de opdrachten is gericht op onderbouwleerlingen havo/vwo die bewust voor wiskunde-A kiezen, terwijl de kale opdracht juist de B-leerling aanspreekt.

Meetkundig redeneren

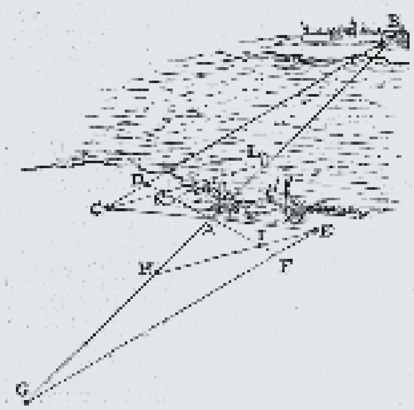
Belangrijk is dat leerlingen ontdekken wat een goede redenering is. In een kort klassengesprek laat ik zien wat drogredeneringen zijn. Alle lezers van Donald Duck weten dat Klara een koe is. Daarom kies ik voor deze naam. Ik geef twee beweringen en vraag om de derde af te maken:

Alle mensen zijn sterfelijk.
Klara is sterfelijk.
Klara is een …

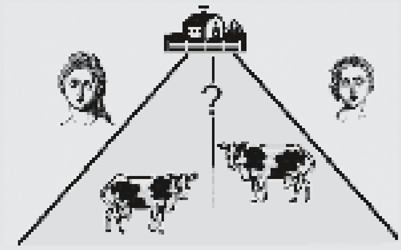
De kans is groot dat de hele klas in koor roept dat Klara een mens is. Waarop ik zeg dat Klara een koe is. Koeien zijn toch sterfelijk? Toch kan met de bewering 'Klara is een mens' wel een ware redenering gemaakt worden. De klas krijgt de opdracht deze drie beweringen in een volgorde zetten die wel logisch is. Er zijn er twee!

Instapopdracht

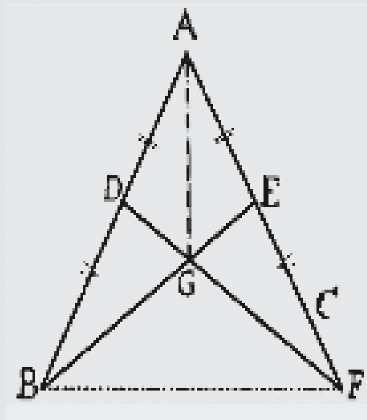
Frans van Schooten Junior gebruikte praktische constructies, bijvoorbeeld om de afstand tot een onbereikbare vesting op te



figuur 1



figuur 2



figuur 3

meten. De afbeelding ***van figuur 1*** komt uit zijn boek *Mathematische Oeffeningen* (1660) [2]. De opdracht is: Hoe bepaal je de afstand van *A* naar *B* als je niet van *A* naar *B* kunt gaan?

Na de korte inleiding over Klara hing ik de tekening van figuur 1 fors uitvergroot op het bord. Ik vertelde iets over de grootschaligheid van de belegeringen van Breda, Den Bosch enz. Ook vertelde ik kort over de behoefte aan landmeters en ingenieurs en over de opleiding aan de Ingenieursschool door de familie van Schooten. Daarna gaf ik iedereen een groot vel A2-papier en vroeg om samen met mij de constructie te maken: ik op het bord en zij gelijktijdig op papier. Iedereen tekende zijn eigen driehoek *ABC*. Ik vertelde dat $AC = AE$, dat punt *D* op de kijklijn *BC* ligt, en dat $AD = AF$. We trokken samen de kijklijnen *EF* en *BA* door naar punt *G* en ontdekten dat *AG* even lang was als *AB*. Uiteraard was dat geen bewijs, maar het leverde wel een sterk vermoeden op. Vervolgens deelde ik de klas in duo's en trio's in, mixte de A- en B-leerlingen en maakte de A-leerlingen penvoerder opdat zij het tempo zouden bepalen. De duo's kregen het lespakket met de originele, oude, Nederlandse tekst, een stappenplan en de opdracht om een bewijs te leveren. Alleen de beste leerlingen daagde ik uit om zelf een stappenplan te bedenken, maar de meeste leerlingen kozen voor het stappenplan. Hieronder staan de drie vragen uit dit lespakket.

Gegeven de punten *A*, *B*, *C*, … met $AC = AE$ en $AD = AF$.

1. Toon aan dat driehoek *ACD* gelijk is [3] aan driehoek *AEF*, en dat dus $\angle C = \angle E$.
2. Toon aan dat driehoek *ACB* een vergroting is van driehoek *AEG*, en dat dus *AB* een vergroting is van *AG*.
3. Toon aan dat driehoek *ADB* gelijk is aan driehoek *AFG*, en dat dus $AB = AG$.

Congruentie

Congruentie zit verstopt in al mijn lespakketten. Omdat dat begrip pas in de bovenbouw behandeld wordt, moet de leerlingen iets over congruentie verteld worden. Mijn ervaring is dat een korte uitleg volstaat. *HZH* vinden ze logisch, maar *ZHZ* is minder vanzelfsprekend.

Toon aan dat …

Lesdoel is dat leerlingen een pittige redenering opzetten die uit meerdere stappen bestaat. Met deelopdrachten worden ze de goede kant opgeloodst. De deelopdrachten zijn geformuleerd als 'Toon aan dat … en dat dus ….'. 'Toon aan' is een typische manier van vragen die veel voorkomt in de bovenbouw. Voordeel is dat leerlingen na iedere deelopdracht altijd door kunnen met de volgende deelopdracht.

En dat dus …

Nieuw is de uitbreiding 'en dat dus …'. Dat is gedaan om leerlingen bij iedere stap aan te sporen te onderzoeken welke winst logisch voortvloeit uit de conclusie die ze net getrokken hebben in de 'omdat … daarom …'.

Context – Dochters verdelen de erfenis

Hieronder staat de context die hoort bij een andere opdracht.
In Holland overlijdt een boer die in het bezit is van een groot stuk land. Zijn twee dochters erven de boerderij, het land en de koeien. De boerderij staat op een hoek van het land (***zie figuur 2***). Iedere dochter wil zoveel mogelijk grond zo dicht mogelijk bij de boerderij. De zussen besluiten eerlijk te delen, maar weten niet hoe dat moet. Ze vragen de beroemde Frans van Schooten Junior om advies. Hij tekent de ***in figuur 3*** staande constructie om de deellijn te vinden. Hij beweert dat er voor iedere graspol aan de ene kant van de lijn een andere graspol is aan de andere kant van de lijn op gelijke afstand van de boerderij.
Deze context maakt duidelijk waarom ze een deellijn zonder passer moeten maken. Wie gaat er met een passer tussen de graspollen en koeienvlaaien staan?
Hieronder staan het constructievoorschrift (I) en het stappenplan (II).

I.

1. Gegeven de punten *A*, *B* en *C*;
2. kies punt *D* op *AB*;
3. punt *E* op *AC* met $AD = AE$;
4. punt *F* op *AC* met $DB = EF$;
5. trek lijn *BE*;
6. trek lijn *DF*;
7. lijn *BE* snijdt lijn *DF* in snijpunt *G*;
8. trek lijn *AG* (dat is de deellijn van $\angle A$).

II.

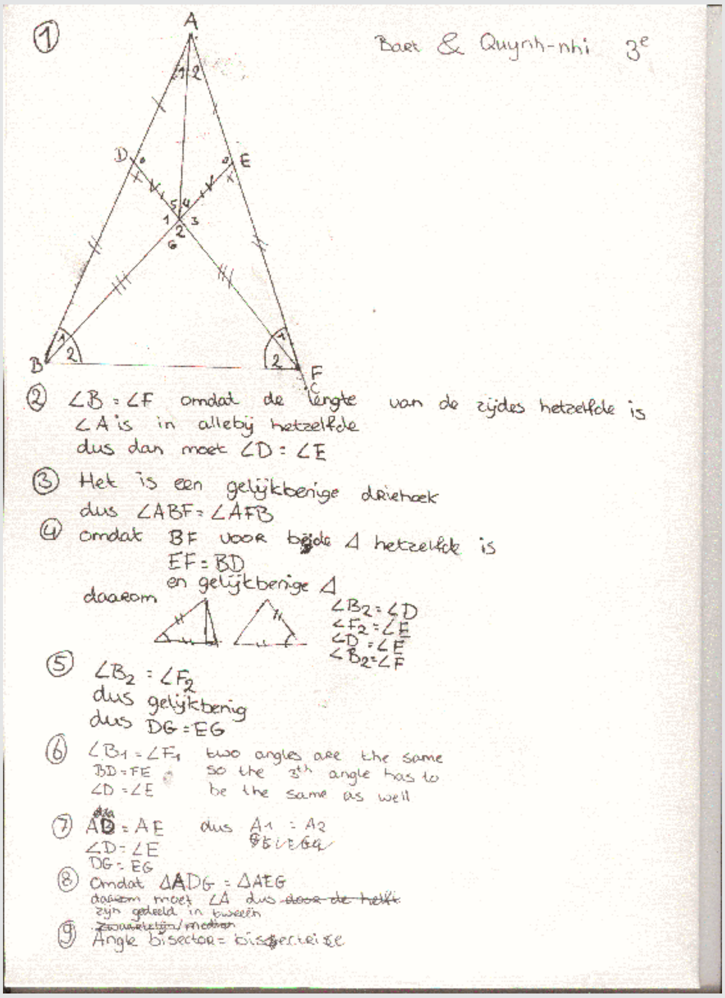
De laatste stap is cruciaal: waarom is de deellijn de meest eerlijke verdeling?

1. Construeer de gelijkbenige driehoek *ABF* met een willekeurige hoek in punt *A*.
2. Toon aan dat ΔABE gelijk is aan ΔAFD en dat dus $BE = DF$.
3. Toon aan dat $\angle ABF = \angle AFB$.
4. Toon aan dat ΔBDF gelijk is aan ΔBEF en dat dus $\angle FBE = \angle DFB$.
5. Toon aan dat ΔBFG gelijkbenig is en dat dus $BG = FG$.
6. Toon aan dat ΔBDG gelijk is aan ΔFEG en dat dus $DG = EG$.
7. Toon aan dat ΔADG gelijk is aan ΔAEG en dat dus $\angle DAG$ en $\angle FAG$.
8. Leg uit dat de erfenis van de boer eerlijk verdeeld is omdat er voor ieder punt aan de ene kant van de deellijn een ander punt is aan de andere kant van de deellijn op gelijke afstand van punt *A*.

Voorbeeld

In figuur 4 staat een uitwerking van twee leerlingen uit 3-TTO [4]. In stap 4 begon het tweetal goed. Ze maakten zelfs speciaal voor deze stap een schets. Je zou verwachten dat ze de stap juist zullen uitvoeren met congruentie *ZHZ*. Maar dan 'zagen' ze

gelijkbenigheid (die er niet was). Ook beweerden ze zonder enige onderbouwing dat bepaalde hoeken even groot waren: $\angle B_2 = \angle D$. In stap 5 maakten ze een reuzensprong door uit de gelijkbenigheid van driehoek *BFG* de conclusie te trekken dat $DG = EG$ zonder iets te doen met $BE = DF$. Deze uitwerking met wonderlijke stappen is typerend voor de onderbouw. Frappant is dat dezelfde leerlingen zes maanden later in de bovenbouw dit soort fouten niet meer maakten toen ze van mij een soortgelijke opdracht kregen.
Bij de nabespreking hadden ze het idee dat ze een perfecte uitwerking hadden ingeleverd. Toen ik zei dat er iets in stap 4 niet klopte, konden ze hun fout niet ontdekken. Pas toen ik hen vroeg om de 'omdat … daarom … dus …' netjes uit te schrijven, zagen ze hun vergissing. Mijn aanmerking op stap 5 werd afgedaan als flauw omdat het toch logisch is dat het verschil van gelijke dingen even groot is. Voor hen was dat geen fout. Ook vonden ze bij stap 9 dat de deellijn het argument was op de vraag waarom de erfenis eerlijk verdeeld is. Zij wilden er niet aan dat het er om ging dat links en rechts even veel graspollen waren. Wiskunde gaat niet over gras, maar over deellijnen!



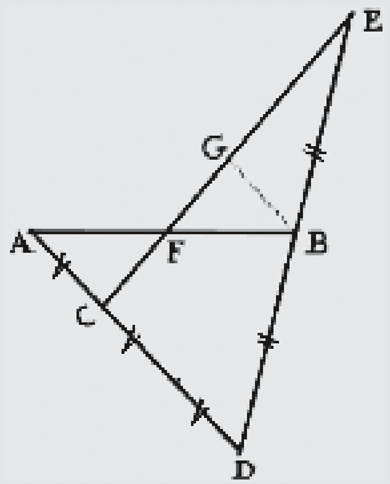
figuur 4

Evaluatie Onderbouw

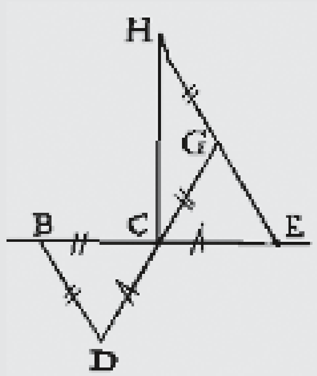
De afgelopen drie jaar heb ik gastlessen verzorgd in verschillende 3-vwo klassen. Leerlingen waardeerden het groepswerk omdat ze elkaar konden aanvullen en corrigeren. Ze raakten ontmoedigd als ze de opdracht individueel moesten maken. Alleen een 2-havo klas vroeg om de eerste stappen klassikaal te zetten. Vanaf de derde klas wilden leerlingen het zelf proberen. Wel kwamen ze bij de eerste stap met veel vragen, vooral over hoe ze 'omdat … daarom … dus …' moesten uitwerken. Ook wilden ze persoonlijke aandacht voor de manier waarop zij omgingen met het begrip congruentie.
Met de vaardigheden zat het goed. Alle overstaande hoeken, vergrotingen en *F*- en *Z*-hoeken werden gevonden. Bijna niemand veronderstelde rechte hoeken omdat de hoek wel recht leek, hoewel de verleiding voor sommigen erg groot was. Slechts een enkeling 'zag' spontaan gelijkbenigheid of gelijkzijdigheid. Ook congruentie ging meestal goed.
Sommige leerlingen wilden liever eerst een getallenvoorbeeld uitwerken op de manier waarop in de tweede klas gewerkt wordt met het uitrekenen van hoeken. Dat getallenvoorbeeld hielp hen wel om een begin te maken, maar vervolgens konden ze er niet los van komen. Hieruit blijkt maar weer dat rekenen aan getallenvoorbeelden en meetkundig redeneren twee verschillende onderwerpen zijn met verschillende aanpakken.
Docenten vonden het positief dat hun leerlingen de volle lestijd enthousiast en actief bezig waren. Alle leerlingen haalden blijmoedig en tevreden de eindstreep.

Doelgroep: bovenbouw-B

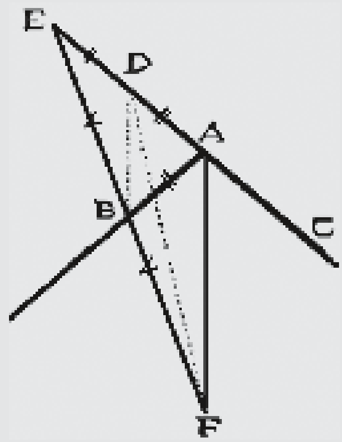
Voor bovenbouwleerlingen met wiskunde-B bleken deze lespakketten zinvol als startopdracht. Mijn klassen maakten de opdracht bij voorkeur met het stappenplan. ***In figuur 5*** (op pag. 282) staat de schets van de opdracht om aan te tonen dat lijn *AP* door lijn *BQ* in twee gelijke stukken gedeeld wordt.
Deze opdracht is ook gebruikt in een training van de Wiskunde Olympiade, maar dan klassiek geformuleerd. Daar stond: Zij *ABC* een driehoek, punt *P* het midden van *BC* en punt *Q* op lijnstuk *CA* zodat $|CQ| = 2 \cdot |QA|$. Zij *S* het snijpunt van *BQ* en *AP*. Bewijs dat $|AS| = |SP|$.
Meer complexe opdrachten zijn gebruikt in proefwerken. Een week voor het proefwerk kreeg een 4-vwo klas de opdracht zonder stappenplan uitgereikt. Ze mochten samen het vraagstuk oplossen, maar op het proefwerk moesten ze individueel in korte tijd een volledig bewijs uitschrijven. ***In figuur 6*** staat de schets van hun proefwerkopdracht om aan te tonen dat $\angle BCH$ altijd recht is.
Na het proefwerk heeft de diversiteit in goede uitwerkingen de docenten verrast. Ondanks de intensieve samenwerking hebben leerlingen hun eigen plan getrokken. Ook vielen er onvoldoendes. Deze leerlingen gaven achteraf toe dat zij de opdracht zwaar onderschat hadden.
Ruim voldoende scoorde een 5-vwo klas. Deze leerlingen hadden voldoende aan vijf minuten uitleg over de zelfstandige opdracht en dat alle antwoorden geformuleerd moesten worden als 'omdat … daarom … dus …'. Zij kregen de opdracht mee naar huis en waren binnen een half uur klaar. Conclusie is dat leerlingen ieder jaar beter presteren. ***In figuur 7*** staat de schets van hun opdracht: het delen van een hoek in twee gelijke hoeken.



figuur



figuur 6



7

Conclusies
In 3-vwo waren juist de A-leerlingen voldoende geboeid door de inleiding om met de driehoeken aan de slag te gaan. Na afloop reageerden leerlingen positief op de les. Daarmee was de eerste doelstelling gehaald: met een positieve instelling aan de slag met meetkunde.
De tweede doelstelling was het aanleren van meetkundig redeneren. Opvallend is dat leerlingen in hun schoolcarrière steeds beter presteren. In 2-havo/vwo konden leerlingen hun opdracht niet zelfstandig maken.
Zij waardeerden vooral de afwisseling in lesvorm. Leerlingen uit 2-vwo en 3-vwo begrepen wel wat de bedoeling is, maar beheersten de vaardigheid van redeneren onvoldoende. In 4-vwo was de redenering meestal goed, maar de uitwerking wisselend van kwaliteit. Pas in 5-vwo scoorden leerlingen ruim voldoende.

Noten en literatuur

[1] I. van Gulik-Gulikers (2005): *Meetkunde opnieuw uitgevonden: een studie naar de waarde en de toepassing van de geschiedenis van de meetkunde in het wiskundeonderwijs*. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen (proefschrift).
[2] F. van Schooten (1660): *Mathematische Oeffeningen*. Amsterdam: Gerrit van Goedesbergh.
[3] Hier wordt 'is gelijk aan' gebruikt in de zin van 'is congruent met' [Red.]
[4] TTO = tweetalig onderwijs [Red.]
[5] S. Groenveld (2009): *De Tachtigjarige Oorlog*. Zutphen: Walburg Pers.

Website
URL: *www.fransvanschooten.nl*
E-mailadres: *frans.van.schooten@planet.nl*

Over de auteur

Henk Hietbrink werkt als docent aan het Cals College in Nieuwegein en heeft het lesmateriaal en de website ontwikkeld dankzij het programma Leraar In Onderzoek van NWO via het project 'Actuele opgaven in de historische context van de 17e eeuw in de Republiek der Nederlanden'.
E-mailadres: hietbrink.h@planet.nl