

Vestingbouw in het klaslokaal

Echte opdrachten voor in de klas Meetkunde / Goniometrie Praktische Opdracht / Profielwerkstuk

Deze hand-out is bedoeld voor de workshop Vestingbouw op de FLOS studiedag van 15 maart 2024.

Opdracht 0	Begrippen Oud-Nederlands Vestingstelsel	4
Opdracht 1	Nikolaus Goldmann (1611 – 1665)	5
Opdracht 2	Simon Stevin (1548 – 1620)	6
Opdracht 3	Galasso Alghisi da Carpi (1523 –1573)	7
Opdracht 4	Adriaan Metius (1571 – 1635)	8
Opdracht 5	Pieter van Schooten (1634 – 1679)	9
Opdracht 6	Andreas Cellarius (1595-1665)	10
Opdracht 7	Samuel Marolois (1572-1627)	11
Antwoorden opdracht 0	Begrippen	12

Links naar deze handout, een video en verdiepingsmateriaal staat op de webpagina <https://fransvanschooten.nl/StevinWorkshop.htm>.

In Euclides 96-6 staat mijn bijdrage “Vestingbouw als context voor sinus-, cosinus- en tangensregel” over vestingbouw in de zestiende en zeventiende eeuw.

In juni 2021 verscheen in Pythagoras mijn bijdrage over de geschiedenis van de tangensregel. Het artikel staat online op <https://pyth.eu/tangensregel>.

Een uitgebreide, meer wetenschappelijke bijdrage verschijnt in 2024 bij TechNet. Mijn berekeningen staan op <https://fransvanschooten.nl/TechNet.htm>.

Voorwoord

De inhoudstafel laat al zien dat de opdrachten niet in historisch-chronologische volgorde staan. Idee is dat eerst het bovenaanzicht van een vijfhoekige vesting uitgewerkt wordt en daarna het zijaanzicht om het profiel in het landschap te duiden. De berekeningen bij het bovenaanzicht van Goldmann zijn relatief eenvoudig. De persoon van Simon Stevin is bijzonder interessant en verdient daarom een plek. De opdracht van Galasso Alghisi da Carpi is het meest fantasievol, maar nooit gerealiseerd in de Noordelijke Nederlanden. Het ontwerp van Metius is daarentegen echt een Hollands ontwerp. Pieter van Schooten is de jongere broer van Frans van Schooten en de zoon van Frans van Schooten Sr. Aan de wiskunde van deze familie is mijn website gewijd. Cellarius hanteert de tangensregel, maar kan ook gemaakt worden met sinusregel en cosinusregel. Samuel Marolois heeft een grote verscheidenheid aan ontwerpen uitgeschreven in zijn boeken. Wie wil kan nog bladzijden vol alternatieven narekenen.

Bij iedere opdracht staat een tekening. De tekeningen komen uit de boeken die geschreven zijn door bovenstaande personen. Soms was enige beeldbewerking noodzakelijk om een tekening leesbaar te maken. Vaak zijn extra punten en labels toegevoegd om de opdrachten eenduidig te formuleren.

De afmetingen zijn meestal uitgedrukt in Rijnlandse roeden, een oude lengtemaat. Omgerekend is die 3,767 meter lang. De Rijnlandse roede werd meestal onderverdeeld in 12 voet. Een voet is dan 31,39 cm lang.

Een vierkante roede is één roede breed bij één roede lang, oftewel $14,2 \text{ m}^2$.

Een andere oppervlaktemaat is de morgen. Een morgen is 600 vierkante roeden. Omgerekend is dat ongeveer 8520 m^2 en dat is iets minder dan een hectare.

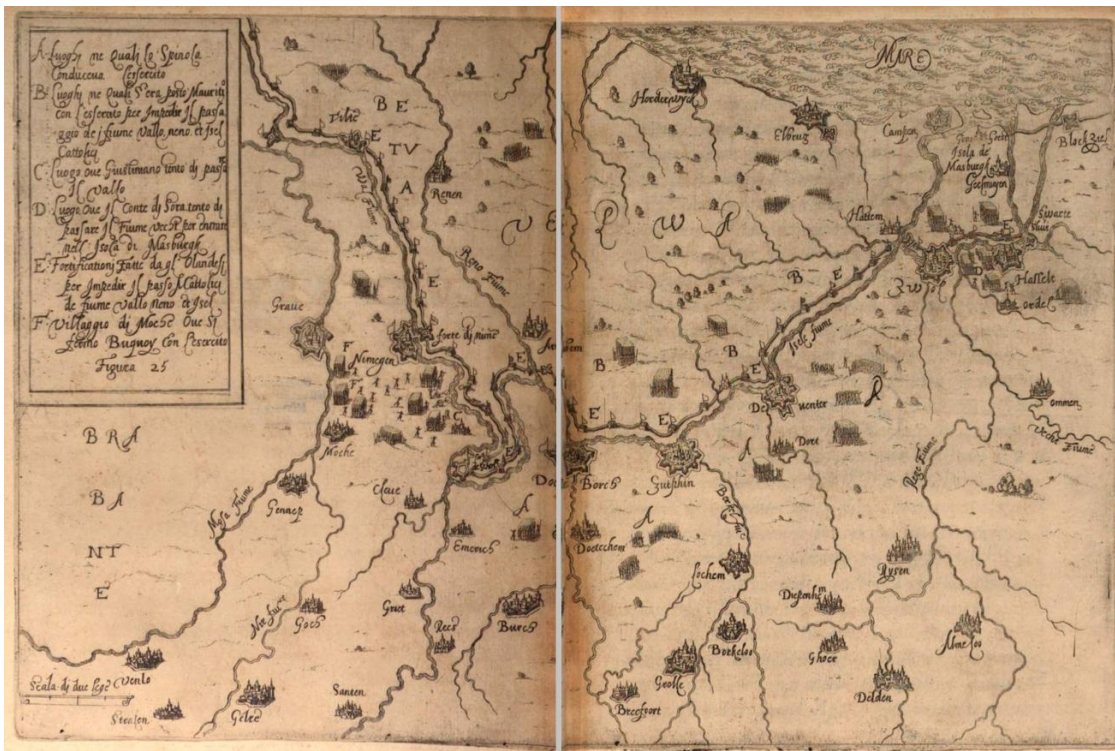
Alle opdrachten in deze hand-out zijn gebaseerd op een regelmatige vijfhoek, maar sommige auteurs beschrijven alle veelhoeken, van de vierhoek tot en met de twaalfhoek. In hun boeken is stof genoeg voor nog tientallen verrassende opdrachten.

In het GeoGebra boek <https://www.geogebra.org/m/xeqjdkpi> zijn animaties opgenomen als toelichting op de opdrachten

Opdracht 0 Tel het aantal vestingen op de kaart



Wikipedia: [Blaeu 1645 - Fossa Sancta Mari%C3%A6 qu%C3%A6 et Eugeniana dicitur vulgo De Nieuwe Grift.jpg](#)

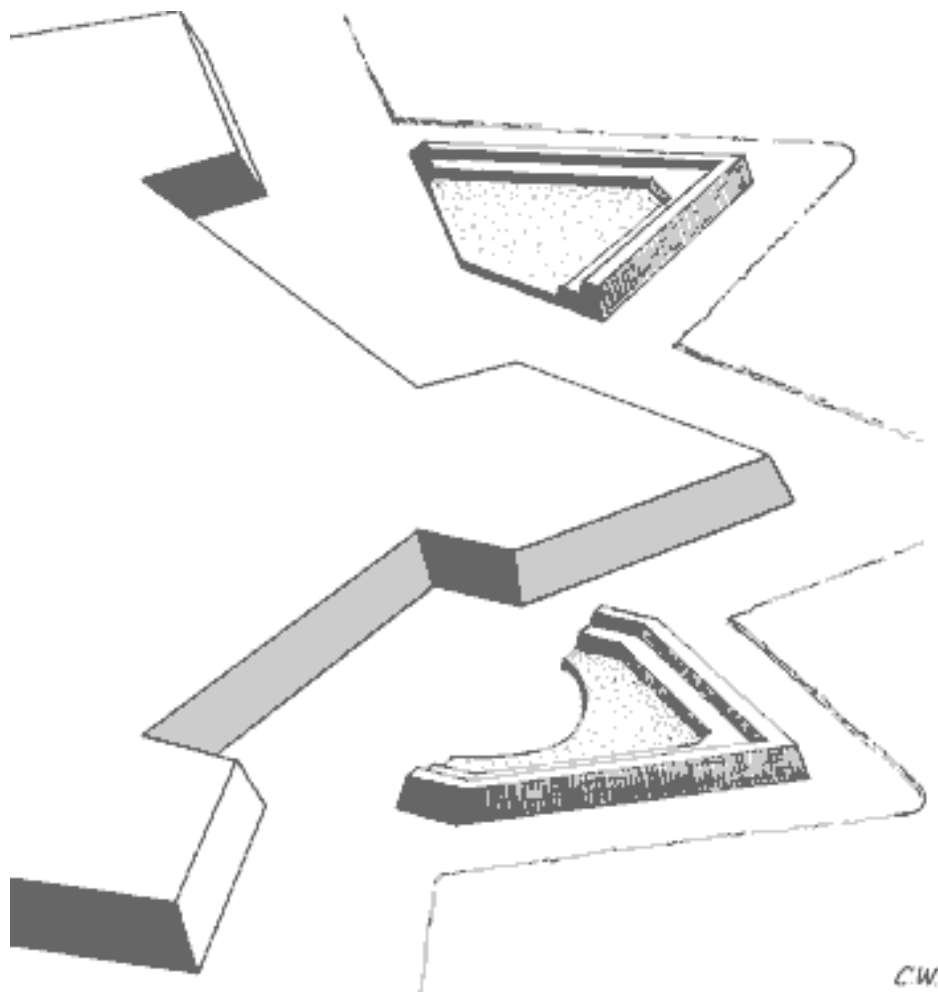


Google Books: <https://books.google.nl/books?id=J-Hkf0pzVEsC>

Opdracht 0 Begrippen Oud-Nederlands Vestingstelsel

Wijs in onderstaande tekening de volgende onderdelen aan:

- Courtine
- Flank
- Face
- Keel
- Hoofdlijn
- Strijklijn
- Defensielijn



© Illustratie: C. Weber (<http://www.coehoorn.nl/terminologie>)

Antwoorden staan op de laatste pagina.

Deze opdracht is beschikbaar als Kahoot: <https://create.kahoot.it/share/workshop-simon-stevin-sterctenbowwing-begrippen/7aa6fef8-9b84-4e69-bf8d-9fed74db56a9>

Opdracht 1 Nikolaus Goldmann (1611 – 1665)

Nikolaus Goldmann gaf privélessen in Leiden in de tijd dat de familie Van Schooten doceerde aan de Duytsche Mathematique. Hieronder staat een tekening van Goldmann uit zijn boek *La nouvelle fortification* uit 1645.

Opdracht is om op schaal een symmetrische vijfhoekige vesting te construeren met de volgende eigenschappen:

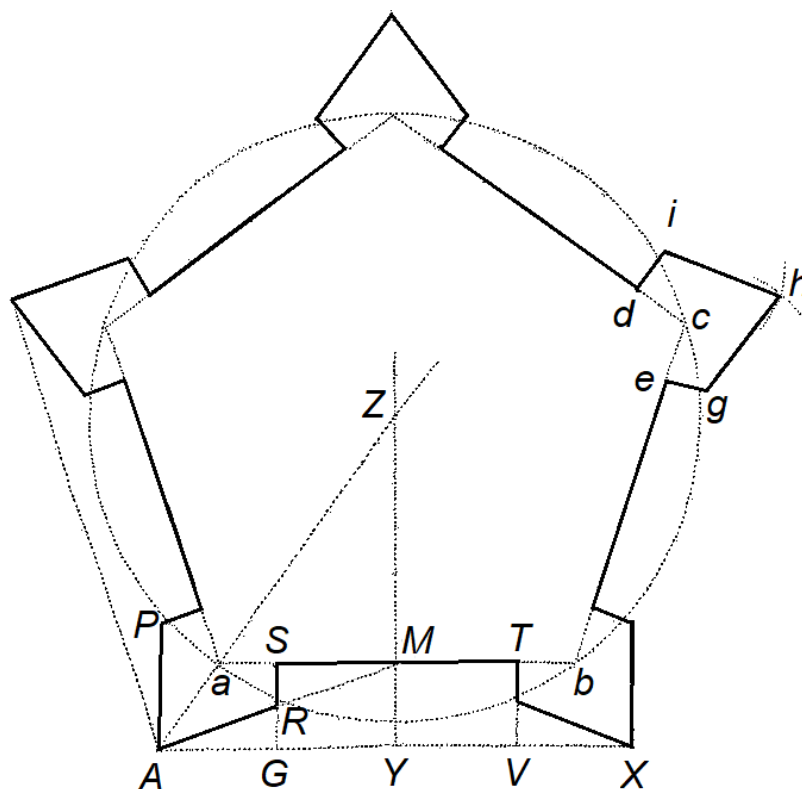
- de courtine, ST , de wal tussen de beide flanken, is 40 roede¹
- de flank, RS , staat loodrecht op de courtine en is 6,7 roede lang
- de kelen, aS , Tb , in het verlengde van de courtine, zijn ieder 9,2 roede lang
- de strijklijn, AM , het verlengde van de face snijdt de courtine halverwege

Bereken:

- de grootte van de bolwerkshoek PAR
- de afstand AX tussen de saillants van twee naastgelegen bolwerken
- de oppervlakte van het vijfhoekige bolwerk $eghid$ ²

Tip: maak een tekening met GeoGebra om je antwoorden te controleren.

Tip: punt R ligt beslist niet op de cirkel, maar iets daar buiten.



Deze opdracht staat online op <http://www.fransvanschooten.nl/Stevin.htm#opdracht1>

¹ Omgerekend is een roede 3,767 meter lang

² Officieel is een bastion een vijfhoek en is zijde de de keel, maar wiskundig ingestelde auteurs rekenden liever met zijden cd en ce als keel.

Opdracht 2 Simon Stevin (1548 – 1620)

Simon Stevin schreef in 1594 als eerste een helder boek over vestingbouw in begrijpelijk Nederlands. Hij gaf precies aan hoe hoog en breed de wallen en bolwerken moesten zijn en hoe breed en hoe diep de gracht.

Onderstaande tekening komt uit zijn boek *Sterctenbouwing*.

Voor de leesbaarheid zijn overbodige letters weggehaald en is kleur toegevoegd.

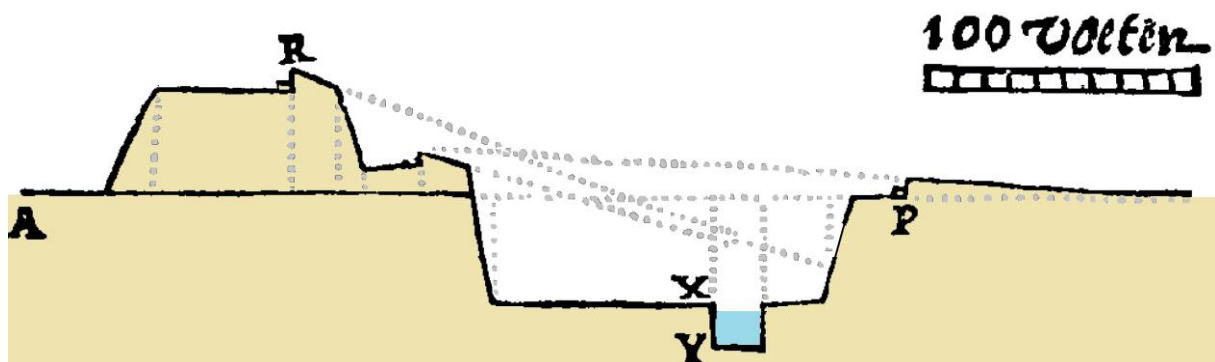
Geef antwoord op de volgende twee multiple choice vragen.

Lijn AP is het grondniveau. Punt R is de bovenkant van de borstwering van het bolwerk. Schat hoe hoog punt R ligt boven het grondniveau.

- ☐ 5 meter
- ☐ 8 meter
- ☐ 12 meter
- ☐ 15 meter
- ☐ 18 meter
- ☐ 21 meter
- ☐ 24 meter

Lijn AP is het grondniveau en punt X markeert het waterpeil. Schat hoe diep punt Y is, de bodem van de gracht, in meters onder grondniveau.

- ☐ 1 meter
- ☐ 5 meter
- ☐ 9 meter
- ☐ 13 meter
- ☐ 17 meter
- ☐ 21 meter
- ☐ 25 meter



Deze opdracht is beschikbaar als Kahoot: <https://create.kahoot.it/share/workshop-simon-stevin-sterctenbouwing/f5bc5eaf-23c3-471d-a28a-42081a3ffbd2>
en als google form quiz <https://forms.gle/n5h2my3exjnbtg8x7>

Opdracht 3 Galasso Alghisi da Carpi (1523 –1573)

Galasso Alghisi da Carpi was een Italiaans architect uit de Renaissance. Hij vond dat vestingbouw niet overgelaten kon worden aan militairen en schreef een boek hoe een vesting met bolwerken er uit moest zien. In *Delle fortificationi* beschreef hij de vijfhoek tot en met de een-en-twintig hoek.

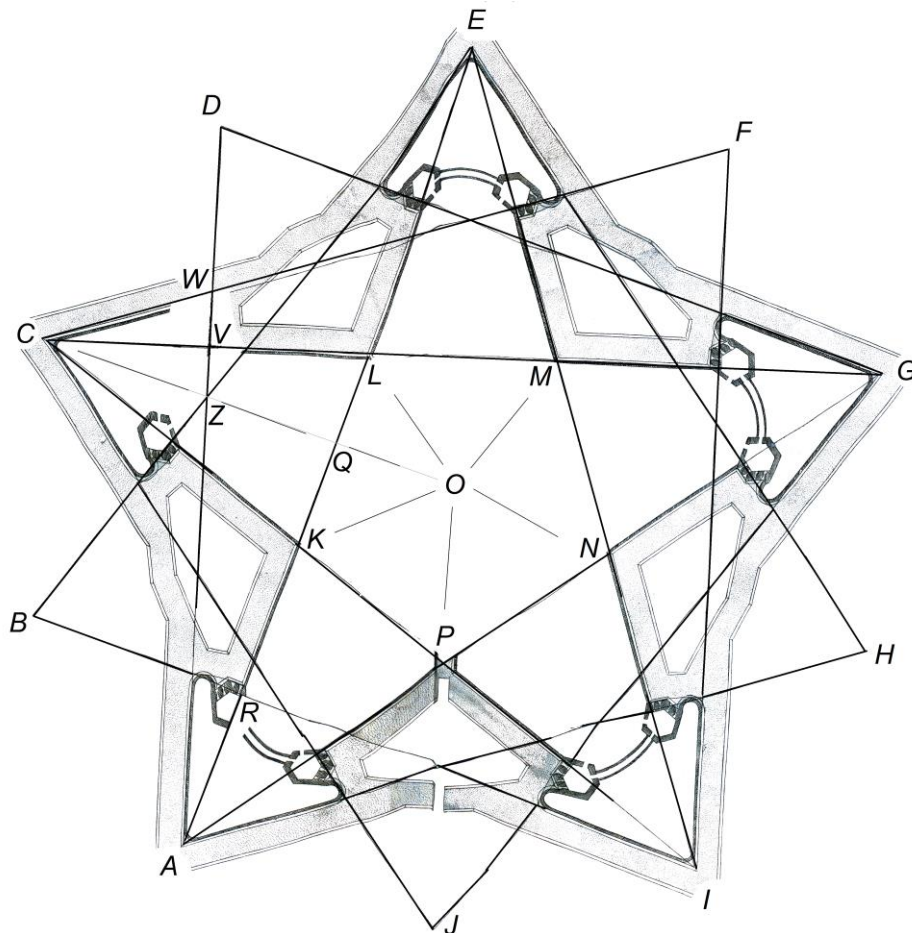
Alghisi construeerde een vesting met als grondvorm een regelmatige vijfhoek met geknikte courtines en met vijf bolwerken. In deze opdracht is de oppervlakte van de binnenste vijfhoek $KLMNP$ exact één morgen, dat wil zeggen precies 600 vierkante roeden (ongeveer 8520 m²).

Opdracht is om de grootte van alle relevante hoeken te berekenen, waaronder

- de bolwerkshoek A
- de grootte van de hoek L van de knik in de courtine

Opdracht is om in één decimaal nauwkeurig de lengte in roeden te berekenen van:

- Face CW
- Halve courtine LV
- Flank VW



Deze opdracht staat op <https://fransvanschooten.nl/StevinWorkshop.htm#opdracht1>

Opdracht 4 Adriaan Metius (1571 – 1635)

Adriaan Adriaansz. Metius studeerde wiskunde in Franeker en Leiden. Zijn vader was Adriaen Anthonisz (1541-1620), vestingbouwkundige, cartograaf, wiskundige en burgemeester van Alkmaar. Adriaen Anthonisz werkte volgens de principes van het oud-Nederlands vestingstelsel. Zijn werkterrein was heel Nederland.

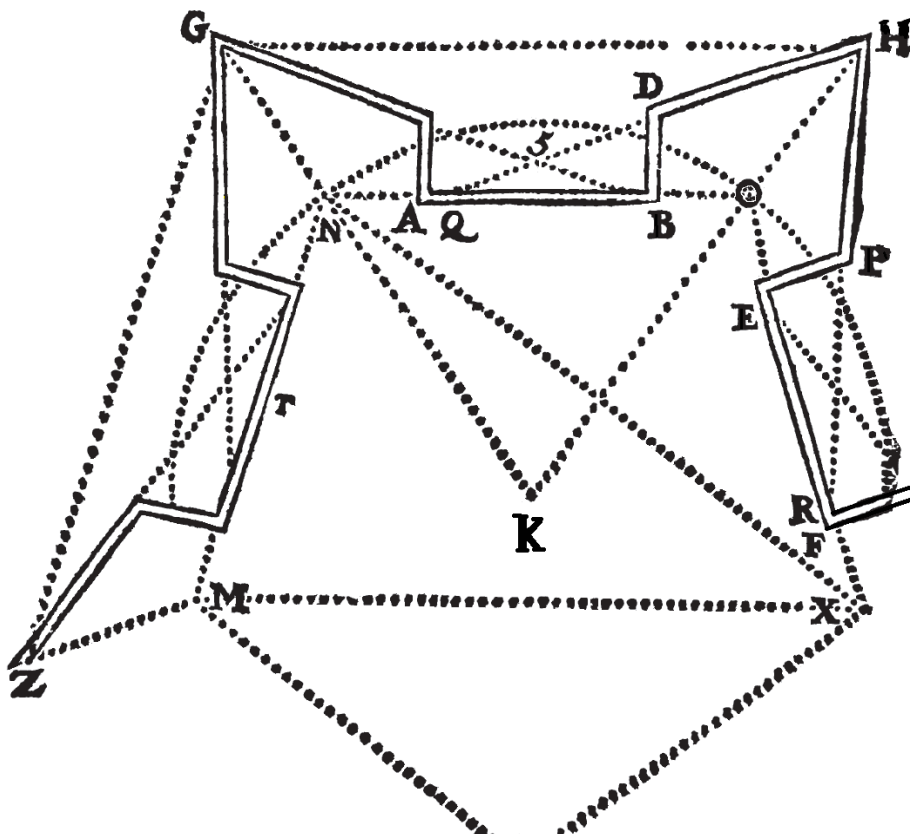
Metius construeerde in zijn boek *Fortificatie ofte stercken-bouwinghe* een vesting met vijf bolwerken met als grondvorm een regelmatige vijfhoek met zijde $NO = 540$ voeten (45 roeden). De verhoudingen tussen de lengtes waren volgens zijn vader:

- Keel : Zijde = $AN : NO = 2 : 9$
- Flank : Zijde = $BD : NO = 1 : 6$

Metius gebruikte de formule $\text{bolwerkshoek} = \frac{2}{3} \text{omtrekshoek}$, maar hoogstens 90° .

Opdracht is om in één decimaal nauwkeurig te berekenen:

- omtrekshoek BOE
- bolwerkshoek DHP
- de lengte van face DH
- de lengte van de defensielijn AH



Deze opdracht staat op <https://fransvanschooten.nl/StevinWorkshop.htm#opdracht4>

Opdracht 5 Pieter van Schooten (1634 – 1679)

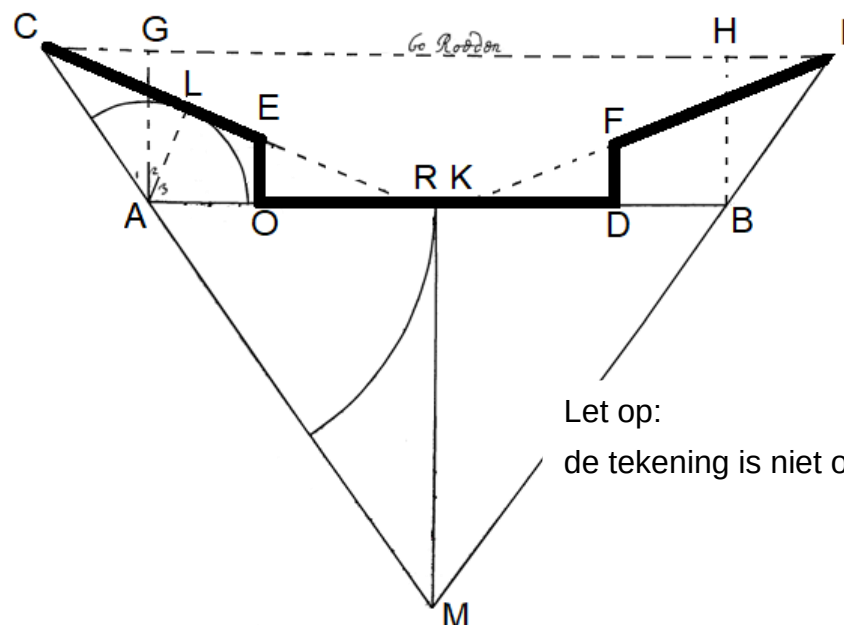
Pieter van Schooten was van 1660 tot 1679 de derde uit de familie van Schooten die les gaf aan de Duytsche Mathematique, onder andere over vestingbouw. Ook heeft hij de steden Utrecht en Leiden geadviseerd over hun vestingwerken. Onderstaande tekening komt uit het Leidse handschrift: *BPL 1993*.

Pieter van Schooten construeerde een regelmatig vijfhoekige vesting met bolwerkafstand $CI = 60$ roeden. Hij berekende de bolwerkshoek met de formule $\frac{1}{3}$ omtrekshoek $+ 30^\circ$. De lengte van de hoofdlijn AC verhoudt zich tot de zijde AB als 1:3. De lengte van de keel AO verhoudt zich tot de zijde AB als 1:5.

Opdracht is om voor deze vesting de lengte in één decimaal nauwkeurig te berekenen van:

- Face CE
- Flank EO
- Courtine DO
- Hoofdlijn AC
- Keel AO
- Strijklijn CR
- Defensielijn CD

Tip: bereken eerst alle relevante hoeken, bijvoorbeeld omtrekshoek, bolwerkshoek en strijkhoek



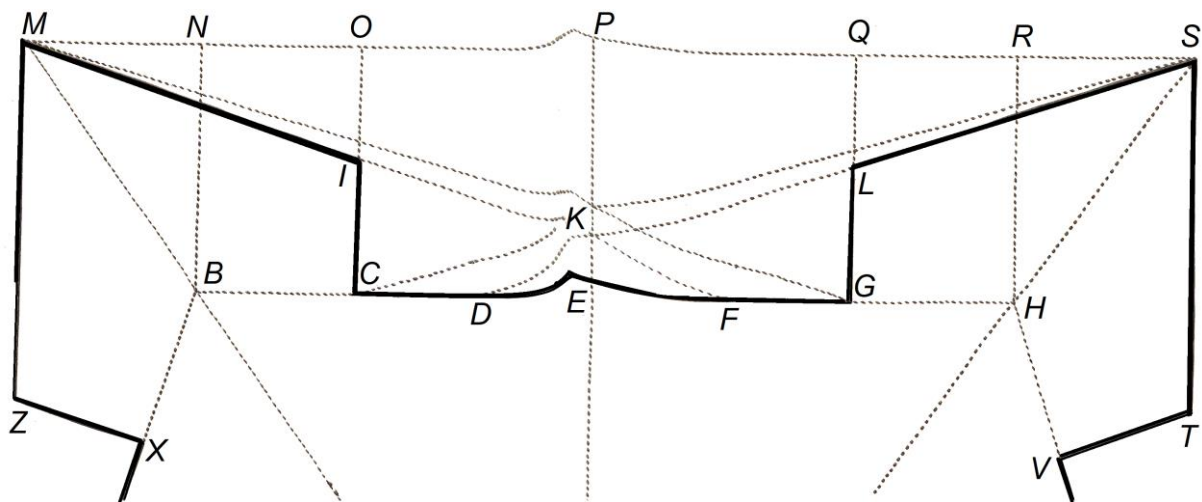
Deze opdracht staat op <https://fransvanschooten.nl/StevinWorkshop.htm#opdracht5>

Opdracht 6 Andreas Cellarius (1595-1665)

Cellarius werd in 1637 rector van de Latijnse school in Hoorn. Hij overleed in 1665, vijf jaar na de uitgave van zijn prachtige *Harmonia Macrocosmica* over de hemelloop. Onderstaande tekening komt uit zijn boek *Architectura militaris*.

Cellarius construeerde een regelmatige vijfhoek met courtine $CG = 36$, flank $CI = 9$, face $IM = 24$ roeden. De bolwerkhoek werd berekend met de formule $\frac{2}{3}$ omtrekshoek, maar is hoogstens 90° .

Opdracht is om met de tangensregel de grootte van de defensiehoek CGM te berekenen.



Tangensregel

In iedere driehoek ABC met hoeken α , β en γ en zijden $AB = c$, $BC = a$ en

$AC = b$ geldt de tangensregel $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right)}{\tan\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)}$. Wanneer je de lengte van

twee zijden a en b kent en de grootte van de ingesloten hoek γ dan kun je de som van die twee andere hoeken uitrekenen omdat de hoekensom 180° is:

$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, Met de tangensregel kun je nu de onbekende $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

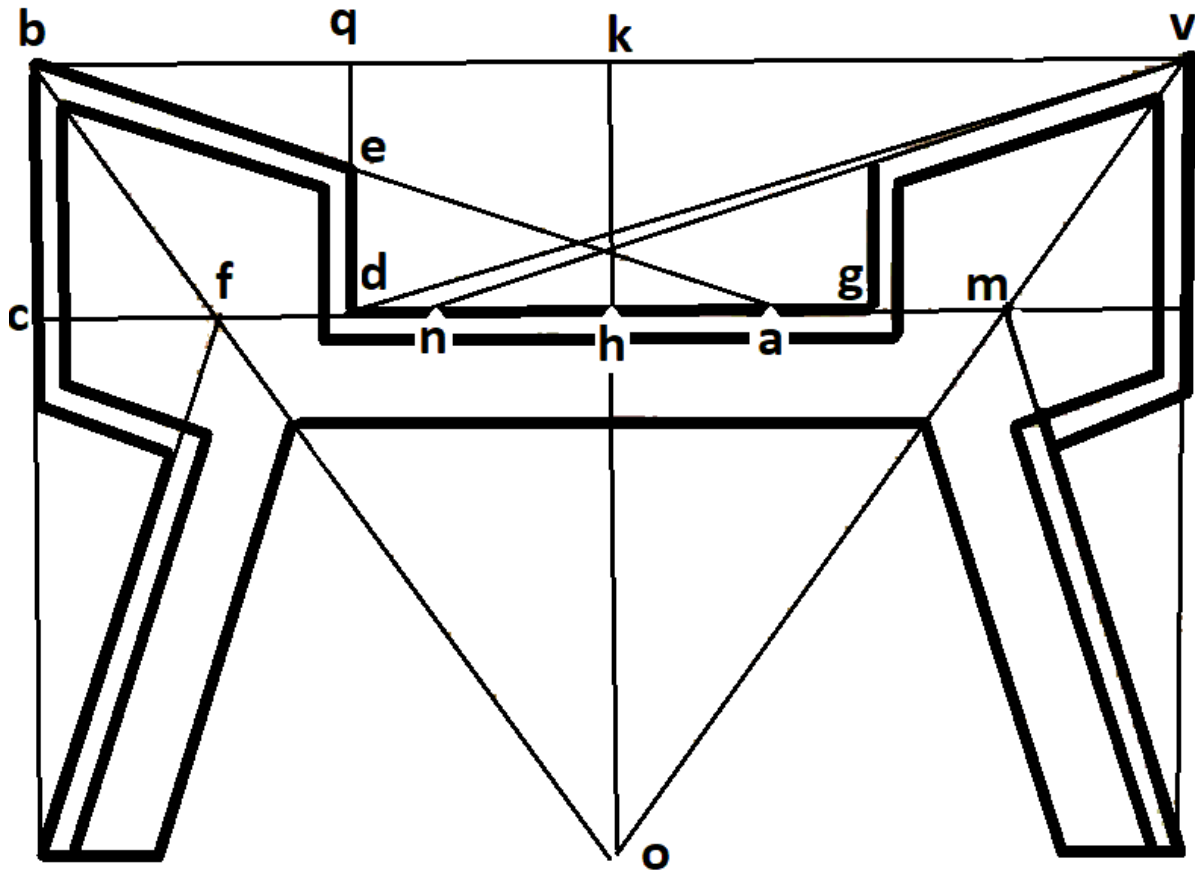
uitrekenen. Omdat $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ en $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, kun je de grootte van de onbekende hoeken α en β uitrekenen.

Deze opdracht staat op <https://fransvanschooten.nl/StevinWorkshop.htm#opdracht6>

In juni 2021 verscheen in Pythagoras mijn bijdrage over de geschiedenis van de tangensregel. Staat online op <https://pyth.eu/tangensregel>.

Opdracht 7 Samuel Marolois (1572-1627)

Marolois was ingenieur en wiskundige. Met een aanbeveling van Prins Maurits solliciteerde hij in 1611 naar een betrekking aan de Duytsche Mathematique, maar de positie ging naar Frans van Schooten Senior.



Samuel Marolois publiceerde in 1615 deze opgave over een regelmatige vijfhoekige vesting met centrum O en zijde FM . Gegeven is de lengte van de strijklijn $AB = VN = 50$ en de lengte van de flank $DE = 9$ en de grootte van de bolwerkshoek $\angle CBE = 72^\circ$ ³.

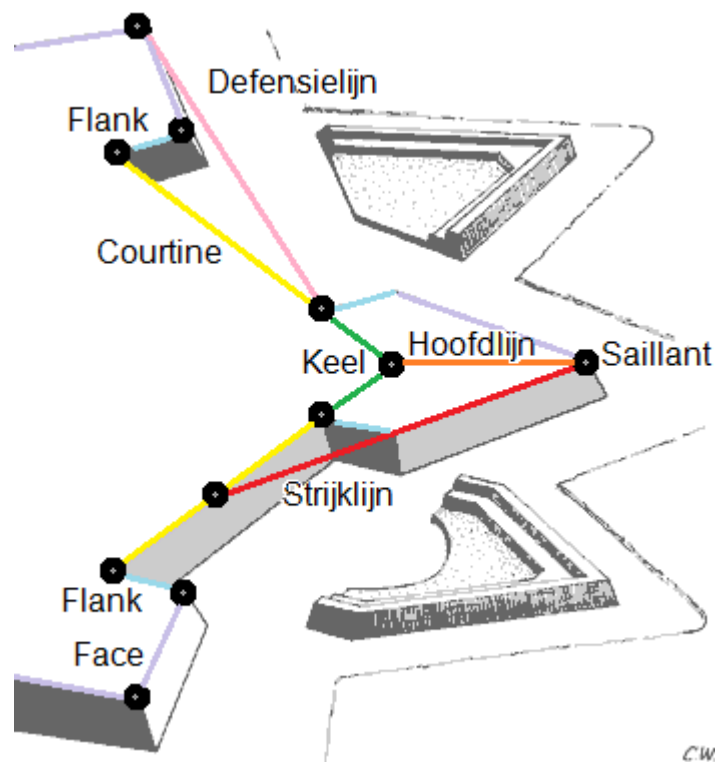
Opdracht is om de lengte van de verschillende onderdelen te berekenen, bijvoorbeeld de lengte van face BE , van courtine DG , van keel $DF = GM$, van zijde FM , van de afstand tussen de bolwerkspunten BV , van de strijkhoeck $\angle BAC = \angle MNV$ of van de defensiehoek $\angle BGC = \angle MDV$.

Deze opdracht staat op <https://fransvanschooten.nl/StevinWorkshop.htm#opdracht7>

³ Marolois (of zijn drukker) vergat in 1615 te vermelden dat tweede flank $AG = DN = 5$, maar herstelde dat in latere drukken.

Antwoorden opdracht 0 Begrippen

- Saillant is de voorste punt van het bolwerk
- Courtine is de wal ingesloten tussen twee bolwerken
- Flank is de zijkant van het bolwerk dat uitkijkt op de courtine
- Flankhoek is de hoek tussen de courtine en de flank, vaak recht, soms stomp
- Face is de voorkant van het bolwerk
- Bolwerkshoek is de hoek tussen beide facen
- Schouderhoek is de stompe hoek tussen flank en face
- Keel is het verlengde van de courtine
- Keel plus courtine plus keel maken samen de zijde van de veelhoek
(nb: voor niet-wiskundigen is de keel de lijn tussen de flankhoeken)
- Keelhoek of omtrekshoek is de hoek tussen beide keellijnen of zijdes
- Hoofdlijn is de lijn van de saillant naar de keelhoek
- Strijklijn is de lijn van de saillant langs de face verlengd tot de courtine
- Strijkhoek is de scherpe hoek tussen courtine en strijklijn
- Defensielijn is de lijn van flankhoek tot saillant
- Defensiehoek is de scherpe hoek tussen courtine en defensielijn



In de zeventiende eeuw waren de begrippen strijklijn en defensielijn gangbaar. Tegenwoordig spreekt men van strijkende defensielijn en bestendige defensielijn.

Vershil in systematiek

Een vesting wordt gebouwd met een doel. Een stad kan zich versterken met permanente bastions, verdedigd met kanonnen. Een vesting kan een toegangsweg beveiligen, zoals Bourtange. Deze vesting wordt beveiligd met relatief kleine kanonnen. Een vesting kan ook een tijdelijk karakter hebben, bijvoorbeeld om tijdens een veldtocht een legerplaats of aanvoerroute te beveiligen. Deze vestingen worden niet met kanonnen verdedigd, maar met enkel musketten. De afmetingen van dit type vesting, het zogeheten klein royaal, wordt gegrensd door de effectieve reikwijdte van een musket. Algemeen is de vuistregel maximaal 60 roeden afstand tussen de punten van de bolwerken. Bij het zogeheten groot royaal mag de lengte van de defensielinie 60 roeden zijn. Het zijn deze begrenzingen die bepalend zijn voor de afmetingen van vesting en bolwerken.

Verschillende auteurs hanteren verschillende regels voor de berekening van de grootte van de hoek van het bolwerk, bijvoorbeeld een stompe hoek, een rechte hoek, 15° meer dan de helft van de polygoonhoek, of 30° meer dan een derde van de polygoonhoek, of simpelweg twee derde van de polygoonhoek. Soms is een auteur duidelijk in zijn formule, maar andere auteurs verbloemen hun berekening. In veel boeken is een tabel opgenomen met alle relevante zijden en hoeken voor de vierhoek tot en met de twaalfhoek. Wiskundig reuze interessant, maar het praktisch nut is weinig evident. Het verschil in systematiek heeft effect op de spitsheid van het bastion en op de lengte van het deel van de wal dat bemand kan worden door verdedigers om een bastion te beschermen. Algemeen inzicht is dat een spitsere bolwerkhoek eerder bezwijkt onder vijandelijk kanonvuur dan een stompe hoek. In theorie wordt ieder bolwerk verdedigd door de naastgelegen bolwerken. In de praktijk kan een bolwerk ook verdedigd worden door soldaten op de wal. Hoe stomper de bolwerkhoek, hoe korter het deel van de wal dat bij kan dragen aan de verdediging van het bolwerk.

Op de webpagina <https://fransvanschooten.nl/TechNet.htm> staan uitgebreide overzichten, classificaties en berekeningen.

In het GeoGebra boek <https://www.geogebra.org/m/xeqjdkpj> zijn animaties opgenomen om de verschillende vormen van vestingbouw grafisch te duiden.